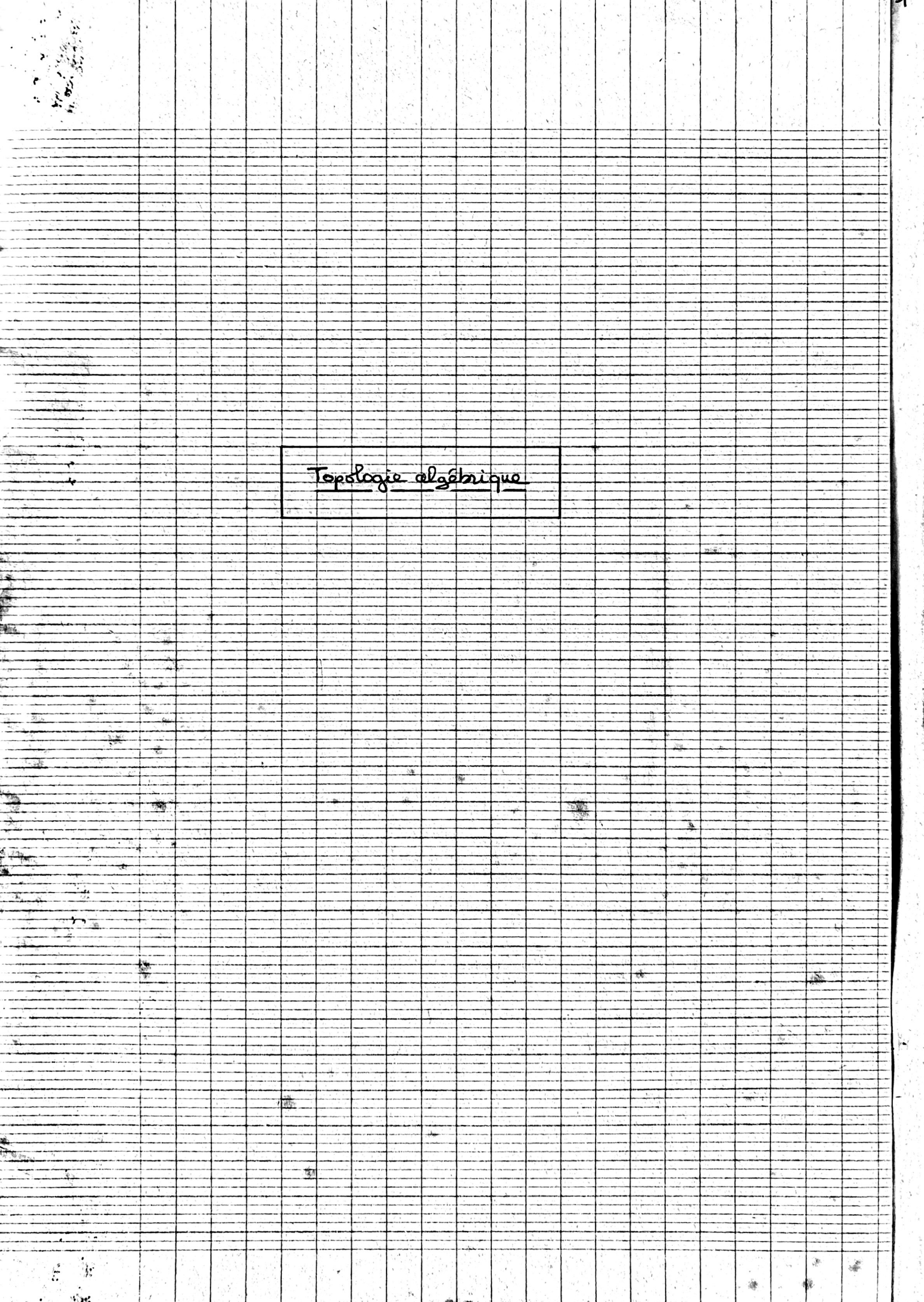

Topologie algébrique

Polyèdres

(ref. Spannier sect. 3.1 et 3.2)

I Complexes simpliciaux

1° Définitions

Définition : Un complexe simplicial K est la donnée d'un ensemble $\{v\}$ de vertexes et d'un ensemble $\{s\}$ de simplexes tels que :

(a) Chaque simplexe s est un ensemble fini non vide de vertexes.

(b) Tout vertexe est un simplexe

(c) Tout sous-ensemble non vide d'un simplexe est encore un simplexe.

Le simplexe $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ s'appelle un q-simplexe (ou simplexe de dimension q, on note $\dim s = q$).
Si $s' \subset s$, on dit que s' est une face de s (propre si $s' \neq s$). Si $s' \subset s$ est de dimension q, s' s'appelle une q-face de s.

Notons que l'ensemble des 0-simplexes de K est en bijection avec l'ensemble $\{v\}$ des vertexes, et que tout simplexe est parfaitement déterminé par ses 0-faces. Par suite K peut être considéré comme égal à l'ensemble des simplexes si l'on identifie les vertexes de K et les 0-simplexes de K.

Exemples :

1) $\{s\} = \emptyset$

2) A = ensemble. La famille des sous-ensembles finis non vides de A est un complexe simplicial.

3) Si s est un simplexe de K, l'ensemble des faces de s est un complexe simplicial noté $\bar{s}$.

4) De même, toutes les faces propres de s forment un complexe simplicial noté $\dot{s}$.

5) Si K est un complexe simplicial, le squelette de dimension q K^q est le complexe simplicial formé des p-simplexes de K tels que $p \leq q$.

6) Soient X un ensemble et $\mathcal{W} = \{W\}$ une famille de sous-ensembles de X. Le nerf $K(\mathcal{W})$ de $\mathcal{W}$ est le complexe simplicial dont les simplexes sont les sous-ensembles finis non vides de $\mathcal{W}$ dont l'intersection est non vide. Les vertexes de $K(\mathcal{W})$ sont donc les sous-ensembles W de $\mathcal{W}$ non vides.

7) Si K_1 et K_2 sont 2 ~~sim~~ complexes simpliciaux, leur union $K_1 * K_2$ est ~~définit le~~ complexe simplicial :

$$K_1 * K_2 = K_1 \ddot{\cup} K_2 \cup \{ s_1 \cup s_2 \mid s_1 \in K_1, s_2 \in K_2 \}$$

L'ensemble des vertexes de $K_1 * K_2$ est la réunion disjointe de l'ensemble des vertexes de K_1 et de celui de K_2.

8) $\{v\} = \mathbb{Z}$

$\{s\}$ défini par $s = \{n\} \subset \mathbb{Z}$ ou $s = \{n, n+1\} \subset \mathbb{Z}$

9) Si $n \geq 1$, $\mathbb{Z}^n$ est partiellement ordonné par $x \leq x' \iff \forall i \; x_i \leq x'_i$.
On peut définir le complexe simplicial dont l'ensemble des vertexes est $\mathbb{Z}^n$ et dont les simplexes sont les sous-ensembles non vides et finis totalement ordonnés $\{x^0, \dots, x^q\}$ de $\mathbb{Z}^n$.

La <u>dimension</u> du complexe simplicial K est :

$$\dim K \doteq \operatorname{Sup} \{ \dim s \mid s \text{ simplexe de } K \}$$

Si $K = \emptyset$, on pose $\dim K = 0$.

Une <u>application simpliciale</u> $\varphi : K_1 \to K_2$ est une fonction de l'ensemble des vertexes de K_1 vers l'ensemble des vertexes de K_2 qui transforme tout simplexe de K_1 en un simplexe de K_2. On obtient ainsi la <u>catégorie des complexes simpliciaux</u> dont les morphismes sont les applications simpliciales.

Si $K = \{s\}$ est un complexe simplicial, $L \subset K$ est un <u>sous-complexe simplicial</u> si c'est un complexe simplicial. Un sous-complexe $L \subset K$ est dit <u>complet</u> si tout simplexe de K dont les vertexes sont tous dans L appartient à L. Il existe un sous-complexe $N \subset K$ dont les simplexes sont les simplexes de K qui ne possèdent pas de vertexe dans L : N est le plus grand sous-complexe de K disjoint de L. Si $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ est un simplexe de K, ou bien aucun des vertexes de s est dans L (alors $s \in N$), ou bien tous les vertexes de s sont dans L (alors $s \in L$ si L est complet), ou bien $v_i \in L$ si $i \leq p$ et $v_i \notin L$ si $i > p$ (où $0 \leq p < q$). Dans ce dernier cas $s = s' \cup s''$ où $s' = \{v_0, \dots, v_p\} \in L$ si L est complet, et $s'' = \{v_{p+1}, \dots, v_q\} \in N$. D'où le lemme :

<u>lemme</u> : Si L est un sous-complexe complet de K et si N est le plus grand sous-complexe de K disjoint de L,

$\forall s$ simplexe de K $\quad s \in N$ ou $s \in L$ ou $s = s' \cup s''$ où $s' \in L$ et $s'' \in N$.

exemples : 1) Si K est un complexe simplicial, le squelette K^q est un sous-complexe de K, si $p \leq q$ K^p est un sous-complexe de K^q. Si $s \in K$, $\dot{s} \subset \bar{s} \subset K$ sont des sous-complexes.

2) Si $\{L_j\}_{j\in J}$ est une famille de sous-complexes de K, alors $\bigcap K_j$ et $\bigcup L_j$ sont aussi des sous-complexes de K.

3) Soient $A \subset X$, $\mathcal{W} = \{W\}$ une famille de sous-ensembles de X et $K_A(\mathcal{W})$ la famille constituée des éléments W de $\mathcal{W}$ fermés et non vides. $K_A(\mathcal{W})$ est un sous-complexe du nerf $K(\mathcal{W})$.

2°/ Polyèdres

Soit K un complexe simplicial. On pose :

$$|K| = \left\{ \alpha : \{v\} \longrightarrow [0,1] \;/\; \begin{cases} (a)\ \{v \in K \;/\; \alpha(v) \neq 0\} \text{ est un simplexe de } K \\ (b)\ \sum_{v\in K} \alpha(v) = 1 \end{cases} \right\} \quad \text{si } K \neq \emptyset,$$

et $|\emptyset| = \emptyset$.

$\alpha(v) \doteq v$-ième coordonnée barycentrique de α

Il y a 2 manières de définir une topologie sur $|K|$:

* On peut définir la distance $d(\alpha,\beta) = \sqrt{\sum_{v\in K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$. On note alors $|K|_d$ l'espace métrique $(|K|, d)$ obtenu.

* Si $s \in K$, définissons le simplexe fermé associé

$$|s| = \{\alpha \in |K| \;/\; \alpha(v) \neq 0 \Rightarrow v \in s\} = \{\alpha \in |K| \;/\; \alpha \text{ nulle hors de } s\}$$

Il est clair que si $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ est un q-simplexe, l'ensemble $|s|$ est en bijection avec le q-simplexe géométrique standard Δ^q :

$$\Delta^q = \{x \in \mathbb{R}^{q+1} \;/\; 0 \leq x_i \text{ et } \sum_{i=0}^{q} x_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{q+1}$$

Il suffit de prendre $\sigma : |s| \xrightarrow{\sim} \Delta^q$

$$\alpha \longmapsto (\alpha(v_0), \dots, \alpha(v_q))$$

L'espace topologique $|s|_d$ induit sur $|s|$ par la distance d de $|K|_d$ est homéomorphe à Δ^q puisque l'application σ conserve les distances.

$\forall s_1, s_2 \in K \qquad s_1 \cap s_2 = \emptyset \Rightarrow |s_1| \cap |s_2| = \emptyset$

$\qquad\qquad\qquad\quad s_1 \cap s_2 \neq \emptyset \Rightarrow |s_1| \cap |s_2| = |s_1 \cap s_2|$

Dans tous les cas, $|s_1| \cap |s_2|$ est un sous-ensemble fermé de $|s_1|_d$ et de $|s_2|_d$, de sorte que la topologie induite par $|s_1|_d$ et par $|s_2|_d$ sur $|s_1| \cap |s_2|$ soit la même.

On définit donc la topologie cohérente* (ou faible) sur $|K|$ en posant :

$\forall A \subset |K| \qquad A$ ouvert $\Leftrightarrow A \cap |s|$ ouvert de $|s|_d \quad \forall s \in K$

$\qquad\qquad\qquad\; A$ fermé $\Leftrightarrow A \cap |s|$ fermé de $|s|_d \quad \forall s \in K$

Comme $|\bar{s}| = |s|_d$, on écrira $|s|$ au lieu de $|\bar{s}|$. On a facilement :

Théorème : Une fonction $f : |K| \to X$, où X est un e.t., est continue pour la topologie cohérente ssi $f|_{|s|} : |s| \to X$ est continue pour tout $s \in K$. Ainsi, f sera continue ssi $f|_{|K^q|} : |K^q| \to X$ est continue pour tout $q \geq 0$.

Ce théorème montre, en particulier, que l'identité $id : |K| \to |K|_d$ est continue.
Si $L \subset K$ alors $|L| \subset |K|$ et $|L|_d$ est un sous-ensemble fermé de $|K|_d$, donc $|L|$ est un sous-ensemble fermé de $|K|$.
On a aussi : $\forall \{L_j\}_{j \in J}$ famille de sous-complexes de K :

$$\bigcup |L_j| = |\bigcup L_j| \quad \text{et} \quad \bigcap |L_j| = |\bigcap L_j|$$

Théorème : $|K|$ est un espace topologique séparé, normal et paracompact (pour la topologie cohérente)

preuve :
* $|K|_d$ séparé et $id : |K| \to |K|_d$ continue $\Rightarrow |K|$ séparé.
* $|K|$ est normal : Il suffit de montrer que, si A est un fermé de $|K|$ n'importe quelle application continue $f : A \to I = [0,1]$ peut être prolongée continument sur $|K|$.
D'après le Th. précédent, l'existence d'une telle extension de f équivaut à l'existence d'une famille d'applications continues $\{f_s : |s| \to I\}_{s \in K}$ telle que

(a) s' face de $s \Rightarrow f_s|_{|s'|} = f_{s'}$

(b) $f_s|_{(A \cap |s|)} = f|_{A \cap |s|}$

(* cf Spannier Introduction Sec. 2 p 4)

Montrons l'existence de la famille $\{f_s\}$ par récurrence sur $\dim s$: Si s est un 0-simplexe, $|s|$ est un point et de 2 choses l'une :

$$\begin{cases} \text{Si } |s| \in A & \text{on pose } f_s = f|_{|s|} \\ \text{Si } |s| \notin A & f_s \text{ arbitraire.} \end{cases}$$

Soit $q>0$, et supposons que f_s est définie pour tous les simplexes s de dimension $\dim s < q$, et vérifie (a) et (b). Soit s un q-simplexe de K, posons $f'_s : |\dot{s}| \cup (A \cap |s|) \longrightarrow I$ telle que :

$$\begin{cases} f'_s|_{|s'|} = f_{s'} & \text{si } s' \text{ est une face de } s \\ f'_s|_{A\cap|s|} = f|_{A\cap|s|} \end{cases}$$

Comme $\{f_{s'}\}_{s'/\dim s' \leq q}$ satisfait (a) et (b), f'_s est une application continue du fermé $|\dot{s}| \cup (A \cap |s|)$ de $|s|$ dans I. Le Théorème d'extension de Tietze montre l'existence de $f_s : |s| \longrightarrow I$ prolongeant les f'_s.

CQFD

La même technique permet de montrer que $|K|$ est parfaitement normal (ie tout fermé de $|K|$ est l'ensemble des zéros d'une fonction continue à valeurs réelles) et paracompact.

Si $s \in K$, on définit le simplexe ouvert :

$$\langle s \rangle = \{ \alpha \in |K| \,/\, \alpha(v) \neq 0 \iff v \in s \} \subset |K|$$

Bien qu'un simplexe fermé $|s|$ soit un ensemble fermé de $|K|$, un simplexe ouvert $\langle s \rangle$ n'est pas forcément ouvert dans $|K|$. Mais $\langle s \rangle$ est un ouvert de $|s|$ car $\langle s \rangle = |s| \setminus |\dot{s}|$. Tout point $\alpha \in |K|$ appartient à un et un seul simplexe ouvert (à savoir $\langle s \rangle$ où $s = \{ v \in K \,/\, \alpha(v) \neq 0 \}$), de sorte que les simplexes ouverts forment une partition de $|K|$.

Si $A \subset |K|$, $A \neq \emptyset$ et $A \subset |s|$, il existe un et un seul plus petit simplexe s tel que $A \subset |s|$. Ce simplexe s'appelle la "carrier" de A dans K. Si $A \subset \langle s \rangle$, la carrier de A est s. En particulier, tout point $\alpha \in |K|$ possède une carrier, à savoir le simplexe $s \in K$ tel que $\alpha \in \langle s \rangle$.

lemme : $A \subset |K|$ possède un ensemble discret (pour la topologie cohérente sur $|K|$) qui consiste en exactement un point dans chaque simplexe ouvert rencontrant A.

preuve : $\forall s \in K \,/\, A \cap \langle s \rangle \neq \emptyset$ soit $\alpha_s \in A \cap \langle s \rangle$ et $A' \div \{\alpha_s\}$. Comme un simplexe fermé contient, au plus, un sous-ensemble fini de A', on constate que tous les sous-ensembles de A' sont fermés pour la topologie cohérente, et donc que A' est discret.

CQFD

Corollaire 1 : Tout sous-ensemble compact de $|K|$ est contenu dans une réunion finie de simplexes ouverts.

preuve : Un compact ne possède pas d'ensemble discret infini. On applique le lemme précédent.

Corollaire 2 : Un complexe simplicial K est fini ssi $|K|$ est compact.

En effet, si K fini, $|K|$ est compact. La réciproque utilise le corollaire précédent.

Théorème : $F : |K| \times I \longrightarrow X$ est continue ssi $F|_{|s| \times I} : |s| \times I \longrightarrow X$ est continue pour tout $s \in K$.

preuve : Un espace séparé X est dit compactement engendré* s'il est muni de la topologie-image pour les inclusions $i_A : A \hookrightarrow X$ pour tout compact A de X (*cf Spannier, Int, sec. 2, 5 p 5)
Ici, $|K|$ est muni de la topologie cohérente* associée aux simplexes fermés de $|K|$, et tout simplexe fermé est un compact de $|K|$, donc $|K|$ est compactement engendré et d'après un théorème de l'introduction (cf. Spannier, Int, sect, 2.7 p 5) $|K| \times I$ est aussi compactement engendré.
Le corollaire 1 montre que tout compact de $|K| \times I$ est inclus dans $|L| \times I$ où L est un sous-complexe de K fini. $|K| \times I$ a donc la topologie cohérente pour la famille $\{|L| \times I \,/\, L \subset K \quad L \text{ fini}\}$.
Cette topologie est identique à la topologie cohérente pour $\{|s| \times I \,/\, s \in K\}$ (puisque L fini $\Rightarrow |L| \times I$ possède la topologie cohérente pour $\{|s| \times I \,/\, s \in L\}$.
CQFD

Si $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ est une application simpliciale, on définit l'application continue $|\varphi| : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ par $\forall v' \in K_2 \quad |\varphi|(\alpha)(v') = \sum_{\varphi(v) = v'} \alpha(v)$

On définit l'application continue $|\varphi|_d : |K_1|_d \longrightarrow |K_2|_d$ par la même formule. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} |K_1| & \longrightarrow & |K_1|_d \\ |\varphi| \downarrow & & \downarrow |\varphi|_d \\ |K_2| & \longrightarrow & |K_2|_d \end{array}$$

$|\ |$ et $|\ |_d$ sont des foncteurs covariants de la catégorie des complexes simpliciaux et des applications simpliciales dans la catégorie des espaces topologiques, et $|K| \longrightarrow |K|_d$ est une transformation naturelle entre eux (ie un morphisme de foncteurs)
On peut aussi considérer ces foncteurs de la catégorie des paires simpliciales dans la catégorie des paires topologiques.

3°/ Triangulation d'un espace topologique.

Définition : Soit X un e.t. Le couple (K, f) est une triangulation de X si K est un complexe simplicial et si $f : |K| \longrightarrow X$ est un homéomorphisme.
Un polyèdre est un e.t. qui possède une triangulation.
De même, une triangulation $((K,L), f)$ de (X, A) est la donnée d'une paire simpliciale et d'un homéomorphisme $f : (|K|, |L|) \rightarrow (X, A)$. Si (X, A) possède une triangulation, (X, A) s'appelle une paire polyèdrale.

exemples :

1) $n \geq 1$ (E^{n+1}, S^n) homéomorphe à $(|\bar{s}|, |\dot{s}|)$, où s est un $(n+1)$-simplexe. (E^{n+1}, S^n) est donc une paire polyèdrale.

2) K = complexe simplicial de l'exemple 8 p1.
$f : |K| \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(|\{n\}|) = n$ et $f|_{|\{n,n+1\}|}$ homéomorphe à $[n, n+1]$. Alors (K, f) est une triangulation de $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est un polyèdre.

3) Pour $n \geq 1$, si K est le complexe simplicial de l'ex 9 p1, et si $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^n$ est défini par $(f(\alpha))_i = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \alpha(x)(x)_i$, alors (K, f) est une triangulation de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre.

Définition : Soit $v \in K$ un vertex. L'étoile de v est

$$st\, v = \{\alpha \in |K| \ / \ \alpha(v) \neq 0\}$$

Comme $|K|_d \longrightarrow I = [0,1]$, $\alpha \longmapsto \alpha(v)$ est une application continue, $st\, v$ est un ouvert dans $|K|_d$, et donc aussi dans $|K|$. On a :

$\alpha \in st\, v \Leftrightarrow$ carrier de α possède v comme vertex
$\Leftrightarrow \alpha \in \langle s \rangle$ où s possède v comme vertex.

Par suite :

$$st\, v = \bigcup_{v \text{ vertex de } s} \langle s \rangle$$

lemme : Soit $L \subset K$ et $v_0, \dots, v_q$ des vertex de K. Alors

$v_0, \dots, v_q$ sont des vertex de L $\Big\} \Longleftrightarrow \bigcap_{0 \leq i \leq q} \mathrm{st}\, v_i \cap |L| \neq \emptyset$

preuve : Spannier lemme 25 p 114

Cela nous donne la relation entre K et le recouvrement d'ouverts de $|K|$ obtenu avec les étoiles de vertex $\mathrm{st}\, v$:

Théorème : $\mathcal{U} \doteq \{\mathrm{st}\, v \,/\, v \in K\}$
L'application simpliciale $\varphi : K \to K(\mathcal{U})$ définie sur les vertex v par $\varphi(v) = \mathrm{st}\, v$ est un isomorphisme simplicial :

$$\varphi : K \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{U})$$

et pour tout $L \subset K$ on a :

$$\varphi|_L : L \xrightarrow{\sim} K_{|L|}(\mathcal{U})$$

Homologie

(ref. Spannier chap. 4)

I Complexes de chaînes

1°/ Groupes différentiels

Un groupe différentiel C est un groupe abélien muni d'un endomorphisme $\partial : C \to C$ tel que $\partial\partial = 0$. L'endomorphisme ∂ est appelé différentielle ou l'opérateur bord de C. Il existe une catégorie dont les objets sont les groupes différentiels et dont les morphismes sont les homomorphismes de groupes qui commutent avec les différentielles.

Soit C un groupe différentiel. On pose :

$Z(C) = \operatorname{Ker} \partial$ = sous-groupe des cycles.

$B(C) = \operatorname{Im} \partial$ = " des bords, $B(C) \subset Z(C)$

$H(C) = Z(C)/B(C)$ = groupe d'homologie de C

Les éléments de H(C) s'appellent les classes d'homologie. On note $\{z\}$ la classe d'homologie du cycle $z \in Z(C)$ et on dit que 2 cycles z_1 et z_2 son homologue (et on note $z_1 \sim z_2$) si $z_1 - z_2 \in B(C)$ (ie s'ils ont la même classe d'homologie)

Si $\tau : C \to C'$ est un homomorphisme de groupes différentiels qui commute avec les différentielles, alors $\tau(Z(C)) \subset Z(C')$ et $\tau(B(C)) \subset B(C')$ de sorte que τ induise un homomorphisme de groupes :

$$\tau_* : H(C) \longrightarrow H(C')$$
$$\{z\} \longmapsto \{\tau(z)\} \qquad \text{où } z \in Z(C)$$

Comme $(\tau_1 \tau_2)_* = \tau_{1*}\tau_{2*}$, on peut définir un foncteur covariant de la catégorie des groupes différentiels dans la catégorie des groupes qui à $C \mapsto H(C)$ et à $\tau \mapsto \tau_*$.

2°/ Groupes gradués.

Un groupe gradué $C = \{C_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ est une famille de groupes abéliens indexés sur $\mathbb{Z}$. Les éléments de C_q s'appellent des éléments de degré q.

Un homomorphisme de groupes gradués de degré d $\tau : C \to C'$ est une famille $\tau = \{\tau_q\}$ d'homomorphismes $\tau_q : C_q \longrightarrow C'_{q+d}$ (on note parfois τ au lieu de τ_q pour simplifier)

On a ainsi défini la catégorie des groupes gradués et d'homomorphismes de groupes gradués (de degré d quelconque) qui contient la sous-catégorie des groupes gradués et des homomorphismes de degré 0.

L'ensemble $\mathrm{Hom}(C, C')$ des homomorphismes de C dans C' de degré 0 est un groupe abélien.

3°/ Groupes gradués différentiels:

On appelle groupe gradué différentiel (et l'on note DG-groupe) tout groupe gradué $C = \{C_q\}$ muni d'une différentielle $\partial : C \to C$ qui est compatible avec la structure graduée, ie de degré r (r fixé).

on note c.c.

Un complexe de chaîne est un groupe gradué différentiel dont la différentielle est de degré -1. Un complexe de chaîne s'écrit donc:

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots$$

où $\partial_q \partial_{q+1} = 0$

Les éléments de C_q s'appellent les q-chaînes de C. Enfin, un complexe de chaîne $C = \{C_q\}$ est dit positif (resp. libre) si $C_q = 0$ pour tout $q < 0$ (resp. si tout C_q est un groupe abélien libre)

Si $C = \{C_q\}$ est un complexe de chaînes, on note:

$Z(C) = \{Z_q(C) = \mathrm{Ker}\, \partial_q\}_q$ = groupe gradué des cycles,

$B(C) = \{B_q(C) = \mathrm{Im}\, \partial_{q+1}\}_q$ = " " des bords,

$H(C) = \{H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)\}_q$ = " " d'homologie de C.

on note m.c.

Un <u>morphisme de chaîne</u> $\tau : C \to C'$ entre 2 complexes de chaîne est un homomorphisme de groupes gradués de degré 0 qui commute avec les différentielles. Ainsi $\tau = \{\tau_q : C_q \longrightarrow C'_q\}$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \\ \tau_q \downarrow & & \downarrow \tau_{q-1} \\ C'_q & \xrightarrow[\partial'_q]{} & C'_{q-1} \end{array}$$

est commutatif.

On a donc une catégorie de complexes de chaînes, dont les objets sont les complexes de chaînes et donc les morphismes sont les morphismes de chaîne.

Si C et C' sont 2 objets de cette catégorie, $\mathrm{Hom}(C, C')$ est un groupe abélien ($\mathrm{Hom}(C, C')$ désigne l'ensemble des morphismes de chaîne $\tau = \{\tau_q\} : C \to C'$) et tout morphisme de chaîne $\tau = \{\tau_q\} : C \to C'$ induit un homomorphisme de degré 0 :

$$\tau_* : H(C) \longrightarrow H(C')$$
$$\{z\} \in H_q(C) \longmapsto \{\tau_q(z)\} \qquad (\text{où } z \in Z_q(C))$$

<u>Théorème</u> : Il existe un foncteur covariant de la catégorie des complexes de chaînes dans la catégorie des groupes gradués et des homomorphismes de degré 0, qui fait correspondre à tout complexe C son groupe d'homologie $H(C)$ et à tout morphisme de chaîne son homomorphisme induit τ_*.
L'application $\tau \mapsto \tau_*$ est un homomorphisme de $\mathrm{Hom}(C, C')$ dans $\mathrm{Hom}(H(C), H(C'))$.

Soit C un complexe de chaînes. Tout complexe $C' \subset C$ tel que $C'_q \subset C_q$ et $\partial'_q = \partial_q|_{C'_q}$ s'appelle un sous-complexe de C, et l'on peut définir le complexe quotient $C/_{C'} \doteq \{C_q/_{C'_q}\}_q$. La famille de projections $\{C_q \longrightarrow C_q/_{C'_q}\}$ s'appelle la projection.

4°/ Foncteur covariant de la catégorie des complexes simpliciaux dans la catégorie des complexes de chaînes libres.

K = complexe simplicial.
$\{v\}$ = ensemble des vertexes de K.
$\{s\}$ = ensemble des simplexes de K.

Un q-simplexe orienté de K est un q-simplexe $s \in K$ et une classe d'équivalence d'ordres totaux des vertexes de s pour la relation suivante : on dira que 2 ordres sont équivalents ssi ils diffèrent seulement par une permutation paire* des vertexes. Si $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ on note $[v_0, \dots, v_q]$ le q-simplexe orienté de K, ie le simplexe s et l'orientation $v_0 < \dots < v_q$ des vertexes.
Notons que chaque vertexe $v \in K$ définit un seul 0-simplexe orienté $[v]$, et qu'à chaque q-simplexe $(q \geq 1)$ correspond 2 q-simplexes orientés.

Soit $C_q(K)$ le groupe abélien engendré par les q-simplexes orientés σ^q et la relation :

$\sigma_1^q + \sigma_2^q = 0$ dès que σ_1^q et σ_2^q sont 2 q-simplexes distincts correspondant au m̂ q-simplexe de K.

Posons $C_q(K) = 0$ si $q < 0$. Si $q \geq 0$, $C_q(K)$ est un groupe abélien
non | libre de rang égal au nombre de q-simplexes de K. Si $K = \emptyset$, posons $C_q(K) = 0$ $\forall q \in \mathbb{Z}$. On peut introduire l'homomorphisme :

$$\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K) \quad (\text{pour } q \geq 1)$$

$$(1) \qquad [v_0, v_1, \dots, v_q] \longmapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]$$

On a défini ∂_q sur les générateurs de $C_q(K)$, mais ∂_q s'étend à tout $C_q(K)$ puisque $\sigma_1^q + \sigma_2^q = 0$ dans $C_q(K) \Rightarrow \partial_q(\sigma_1^q) + \partial_q(\sigma_2^q) = 0$ dans $C_{q-1}(K)$. Si $q \leq 0$, ∂_q est l'homomorphisme trivial.
On montre que $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ et donc que $C(K) \doteq \{C_q(K), \partial_q\}$ est un complexe de chaînes positif appelé le "complexe de chaînes orientées de K". Son groupe d'homologie $H(K) = \{H_q(K) \doteq H_q(C(K))\}$ est un groupe gradué appelé le "groupe d'homologie orienté de K", et $H_q(K)$ s'appelle le "q-ième groupe d'homologie orienté de K".

* ainsi $[v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}] = \varepsilon(\sigma) [v_0, \dots, v_q]$ $\forall \sigma \in \Sigma_{q+1}$

Il est maintenant nécessaire d'introduire plus de générateurs et de relations dans les groupes de chaîne $C_q(K)$:

Si $v_0, \dots, v_q$ sont des vertexes de K, on définit $[v_0, \dots, v_q] = 0 \in C_q(K)$ si 2 vertexes parmi ces $v_0, \dots, v_q$ sont égaux. L'équation (1) qui défini ∂_q est encore correcte puisque si les vertexes $v_0, \dots, v_q$ ne sont pas distincts, le membre de droite de (1) est aussi nul.

Cela étant, si $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ est une application simpliciale on peut définir un morphisme de chaînes associé par :

$$C(\varphi) : C(K_1) \longrightarrow C(K_2)$$
$$[v_0, \dots, v_q] \longmapsto [\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)]$$

$[\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)]$ a bien un sens même lorsque les vertexes $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)$ ne sont pas distincts. On vient de montrer le théorème :

<u>Théorème</u> : Il existe un foncteur covariant de la catégorie des complexes simpliciaux dans la catégorie des complexes de chaînes qui associe le complexe de chaînes $C(K)$ à tout complexe simplicial K.

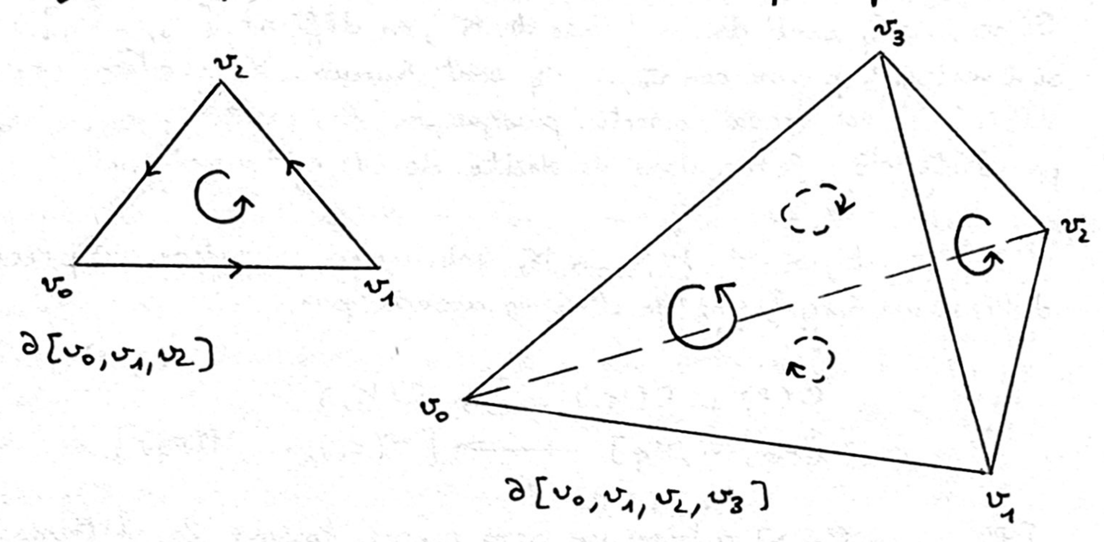
La composée du foncteur C et du foncteur homologie est encore un foncteur covariant qui s'appelle le "foncteur homologie orientée" de la catégorie des complexes simpliciaux dans la catégorie des groupes gradués. A tout complexe simplicial K il fait correspondre le groupe gradué $H(K) = \{ H_q(K) \doteqdot H_q(C(K)) \}$ et à toute application simpliciale $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ l'homomorphisme $\varphi_* : H(K_1) \longrightarrow H(K_2)$ de degré 0 induit par $C(\varphi) : C(K_1) \longrightarrow C(K_2)$.

Si L est un sous-complexe de K, et $i : L \hookrightarrow K$ alors $C(i) : C(L) \longrightarrow C(K)$ est un morphisme injectif, de sorte que nous puissions identifier $C(L)$ comme sous-complexe de $C(K)$.

<u>Exemple</u> :

Si K est réalisé dans un espace euclidien, les q-simplexes orientés de K sont des q-simplexes de K donnés avec une orientation (au sens de l'algèbre linéaire) de la variété affine engendrée par eux.

Le bord d'un q-simplexe orienté est la somme de ses (q-1)-faces orientées, chacune de ces faces étant orientée de façon compatible avec l'orientation du q-simplexe :



$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$
$$= [v_1, v_2] + [v_2, v_0] + [v_0, v_1]$$

↻ = orientation du 2-simplexe
→ = orientation du 1-simplexe
(• = un 0-simplexe est canoniquement orienté !)

Un q-cycle orienté z de K est une famille "fermée" de q-simplexes orientés dont chaque (q-1)-simplexe du bord de z ~~(ie chaque face de z)~~ apparaît le même nombre de fois avec l'une ou l'autre des orientations, de sorte que $\partial_q z = 0$.

Par exemple :

$$z = [v_0, v_1, v_2] + [v_1, v_0, v_2] \in C_2(K)$$ est un 2-cycle

puisque :

$$\partial_q z = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] + [v_0, v_2] - [v_1, v_2] + [v_1, v_0]$$
$$= 0$$

En fait, dans cet exemple : $z = 0$!

Remarquons sur cet exemple que $\partial_q [v_{\sigma(0)}, \dots, v_{\sigma(q)}] = \varepsilon(\sigma) \partial_q [v_0, \dots, v_q]$.

Ici, $H_q(K)$ est l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation entre q-cycles : 2 cycles sont équivalents ssi leur différence est un bord. Ainsi $H_q(K)$ correspond intuitivement au groupe engendré par les "trous" q-dimensionnels de $|K|$.

5°/ Foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des complexes de chaînes.

$p_0, \dots, p_q, \dots$ = suite infinie d'éléments fixés.
Δ^q = complexe simplicial dont les vertexes sont $p_0, \dots, p_q$ et dont les simplexes sont les parties non vides de $\{p_0, \dots, p_q\}$. Ainsi Δ^q est le simplexe fermé $|p_0, p_1, \dots, p_q|$.

Si $q \geq 0$ et $0 \leq i \leq q+1$, on définit :

$$e^i_{q+1} : \Delta^q \longrightarrow \Delta^{q+1}$$
$$p_j \longmapsto p_j \text{ si } j<i$$
$$p_j \longmapsto p_{j+1} \text{ si } j \geq i$$

$e^i_{q+1}(\Delta^q)$ est le simplexe fermé $|p_0, p_1, \dots, \hat{p_i}, \dots, p_{q+1}|$ de Δ^{q+1}. Un calcul direct donne :

<u>lemme 1</u> : $0 \leq j < i \leq q+1 \quad e^i_{q+2}\, e^j_{q+1} = e^j_{q+2}\, e^{i-1}_{q+1}$

<u>Définition</u> : Soient X un espace topologique et $q \geq 0$. Un <u>q-simplexe singulier</u> de X est une application continue

$$\sigma : \Delta^q \longrightarrow X$$

Si $q > 0$ et $0 \leq i \leq q$, la i-face de σ, notée $\sigma^{(i)}$, est le $(q-1)$-simplex singulier de X donné par :

$$\sigma^{(i)} = \sigma \circ e^i_q : \Delta^{q-1} \xrightarrow{e^i_q} \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X$$

On a, d'après le lemme 1 :

<u>lemme 2</u> : $\forall q > 1 \quad 0 \leq j < i \leq q$, $(\sigma^{(i)})^{(j)} = (\sigma^{(j)})^{(i-1)}$

Le <u>complexe de chaînes singulières</u> de X, noté $\Delta(X)$, est égal au complexe de chaînes libre positif $\Delta(X) = \{\Delta_q(X), \partial_q\}$ où $\Delta_q(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les q-simplexes singuliers de X pour $q \geq 0$ (et $\Delta_q(X) = 0$ si $q < 0$), et où ∂_q est défini par l'équation :

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \sigma^{(i)} \qquad (\text{lorsque } q \geq 1)$$

On a bien un complexe de chaînes puisque $\partial_q \partial_{q+1}$ (cf. lemme 2). Si $X = \emptyset$, on pose $\Delta_q(X) = 0 \ \forall q$.

A toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ on fait correspondre le morphisme de chaîne :

$$\Delta(f) : \Delta(X) \longrightarrow \Delta(Y)$$

définie par :

$\Delta(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ où $\sigma : \Delta^q \longrightarrow X$ est un q-simplexe singulier. Ainsi :

<u>Théorème</u> : Il existe un foncteur covariant Δ de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des complexes de chaînes qui, à l'espace topologique X fait correspondre le complexe de chaînes singulier $\Delta(X)$.

La composée du foncteur Δ et du foncteur homologie est un foncteur covariant appelé "foncteur homologie singulière", de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des groupes gradués. A l'espace X il fait correspondre le groupe gradué $H(X) = \{H_q(X) \doteq H_q(\Delta(X))\}$ et à l'application continue $f : X \to Y$ il fait correspondre le morphisme $f_* : H(X) \longrightarrow H(Y)$ de degré 0 induit par $\Delta(f)$ $\Delta(f) : \Delta(X) \longrightarrow \Delta(Y)$

$H_q(X)$ est le q-ième <u>groupe d'homologie singulière</u> de X

Si $A \subset X$ est un sous-espace de X, $id : A \hookrightarrow X$ permet d'obtenir $\Delta(i) : \Delta(A) \longrightarrow \Delta(X)$, qui est un monomorphisme. Ainsi $\Delta(A)$ est un sous-complexe de $\Delta(X)$.

6°/ <u>Propriétés du foncteur homologie</u>.

On peut facilement définir la somme et le produit d'une famille $\{C^j\}_{j\in J}$ de complexes de chaîne :

$$\bigoplus_{j\in J} C^j = \Big\{\bigoplus_{j\in J} C^j_q\Big\}_q \quad \text{et} \quad \underset{j\in J}{\times} C^j = \Big\{\underset{j\in J}{\times} C^j_q\Big\}_q$$

de sorte que pour tout $q \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} Z_q(\oplus C^j) = \oplus Z_q(C^j) & \text{et} \quad Z_q(\times C^j) = \times Z_q(C^j) \\ B_q(\oplus C^j) = \oplus B_q(C^j) & \quad\quad B_q(\times C^j) = \times B_q(C^j) \end{cases}$$

donc :

$$H_q(\oplus C^j) = \oplus H_q(C^j) \quad \text{et} \quad H_q(\times C^j) = \times H_q(C^j)$$

<u>Théorème</u> : Dans la catégorie des complexes de chaînes, le foncteur homologie commute avec les sommes et les produits.

La catégorie des complexes de chaînes possède aussi les notions de limites projectives et inductives (dont les q-ième groupes sont les limites correspondantes des q-ième groupes des facteurs), et :

<u>Théorème</u> : Le foncteur homologie commute avec la limite inductive.

preuve :
Soient : $\{C^\alpha, \tau_{\beta\alpha}\}$ = système inductif de complexes de chaînes,
$C = \varinjlim C^\alpha = \{C, i_\alpha\}$ = limite inductif de ce système
(donc : $i_\alpha : C^\alpha \to C$ est surjective et vérifie si $\beta \leq \alpha$
$i_\alpha = i_\beta \circ \tau_{\beta\alpha} : C^\alpha \to C^\beta \to C$)

Montrons que $\{H(C), i_{\alpha *}\}$ est la limite inductive du système inductif $\{H(C^\alpha), \tau_{\beta\alpha *}\}$ de groupes gradués, de sorte que nous aurons bien montré que $H(\varinjlim C^\alpha) = \varinjlim (H(C^\alpha))$.
<u>Rappel</u> : il existe un unique morphisme g qui fasse commuter le diagramme suivant pour tout α :

$$\begin{array}{ccc} H_q(C^\alpha) & \xrightarrow{\;i_{\alpha *}\ \text{morphisme}\;} & \\ {\scriptstyle (\varinjlim \tau_{\beta\alpha *} \doteqdot)\ \tau_{\alpha *}} \downarrow & \searrow & \\ \varinjlim H_q(C^\alpha) & \xrightarrow[g]{} & H_q(C) \end{array}$$

et il reste à montrer que g est un isomorphisme :
* <u>g est surjective</u> :
Si $\{z\} \in H_q(C)$ $\exists \alpha$ $z = i_\alpha c^\alpha$ où $c^\alpha \in C_q^\alpha$
et $0 = \partial_q z = \partial_q i_\alpha c^\alpha = i_\alpha \partial_q^\alpha c^\alpha$
donc $\exists \beta$ $\beta \leq \alpha / \tau_{\beta\alpha} \partial_q^\alpha c^\alpha = 0 \Rightarrow \tau_{\beta\alpha} c^\alpha \in Z(C_q^\beta)$
et $i_\beta \tau_{\beta\alpha} c^\alpha = i_\alpha c^\alpha = z \Rightarrow i_{\beta *}\{\tau_{\beta\alpha} c^\alpha\} = \{z\}$ donc g surjective.

* g <u>injective</u> : Il suffit de montrer que si $\{z^\alpha\} \in H_q(C^\alpha)$ est dans le noyau de $i_{\alpha *}$, il existe $\beta / \beta \leq \alpha$ et $\{z^\alpha\} \in \operatorname{Ker} \tau_{\beta\alpha *}$
(car alors, si $\vec{z} \in \operatorname{Ker} g$, $g(\vec{z}) = 0$ et $\exists \{z^\alpha\} \in H_q(C^\alpha) / \vec{z} = \tau_{\alpha *}(z^\alpha)$
donc $0 = i_{\alpha *}(z^\alpha) \Rightarrow \{z^\alpha\} \in \operatorname{Ker} \tau_{\beta\alpha *} \Rightarrow \tau_{\alpha *}(\{z^\alpha\}) = \vec{z} = 0$)
Ainsi :
si $i_{\alpha *}\{z^\alpha\} = 0$, on a $i_\alpha z^\alpha = \partial_{q+1} c$ où $c \in C_{q+1}$. Comme $c = i_\beta c^\beta$ pour un β, on a $i_\alpha z^\alpha = i_\beta \partial_{q+1}^\beta c^\beta$. Prenons $\delta \leq \alpha$ et $\delta \leq \beta$. Alors :
$i_\delta(\tau_{\delta\alpha} z^\alpha - \tau_{\delta\beta} \partial_{q+1}^\beta c^\beta) = 0$ donc il existe $\gamma \leq \delta$ tel que
$\tau_{\gamma\delta}(\tau_{\delta\alpha} z^\alpha - \tau_{\delta\beta} \partial_{q+1}^\beta c^\beta) = 0 \Rightarrow \tau_{\gamma\alpha} z^\alpha = \partial_{q+1}^\gamma (\tau_{\gamma\beta} c^\beta) \Rightarrow \tau_{\gamma\alpha *}\{z^\alpha\} = 0$
CQFD.

NB : Le foncteur homologie ne commute pas avec la limite projective (cf. contre-exemple sect. 1.8 p 162)

II Homotopie de chaîne

1°/ Définitions

2 morphismes de chaînes $\tau, \tau' : C \to C'$ sont homotopes s'il existe un homomorphisme $D = \{D_q\} : C \to C'$ de degré 1 tel que :

$$\forall q \in \mathbb{Z} \qquad \partial'_{q+1} D_q + D_{q-1}\partial_q = \tau_q - \tau'_q \quad : C_q \longrightarrow C'_q$$

$$\begin{array}{ccc} C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \\ D_q \downarrow & \searrow^{\tau_q - \tau'_q} & \downarrow D_{q-1} \\ C'_{q+1} & \xrightarrow[\partial'_{q+1}]{} & C'_q \end{array}$$

L'homotopie de chaîne est une relation d'équivalence dont on notera $[C, C']$ l'ensemble quotient. Si $\tau : C \to C'$ est un morphisme de chaînes, notons $[\tau] \in [C, C']$ sa classe d'homotopie.

<u>lemme</u> : Les composées de morphismes de chaînes homotopes sont encore homotopes.

preuve : Notons :
$D : \tau \simeq \tau'$
$\bar D : \bar\tau \simeq \bar\tau'$

$$\begin{array}{ccccc} C_{q+1} & \xrightarrow{\tau_{q+1}} & C'_{q+1} & \xrightarrow{\bar\tau_{q+1}} & C''_{q+1} \\ \partial_{q+1}\downarrow & & \downarrow \partial'_{q+1} & & \downarrow \bar\partial'_{q+1} \\ C_q & \xrightarrow[\tau_q]{} & C'_q & \xrightarrow[\bar\tau_q]{} & C''_q \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bar\tau\tau - \bar\tau'\tau' &= \bar\tau(\tau - \tau') + (\bar\tau - \bar\tau')\tau' \\ &= \bar\tau_q(\partial'_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q) + (\bar\partial'_{q+1}\bar D_q + \bar D_{q-1}\partial'_q)\tau'_q \\ &= \bar\partial'_{q+1}\bar\tau_{q+1}D_q + \bar\tau_q D_{q-1}\partial_q + \bar\partial'_{q+1}\bar D_q\tau'_q + \bar D_{q-1}\tau'_{q-1}\partial_q \\ &= \bar\partial'_{q+1}(\bar\tau_{q+1}D_q + \bar D_q\tau'_q) + (\bar\tau_q D_{q+1} + D_{q-1}\tau'_{q-1})\partial_q \end{aligned}$$

Ainsi $\bar\tau D + \bar D\tau' : C \to C' \to C''$ est de degré 1 et définit l'homotopie entre $\bar\tau\tau$ et $\bar\tau'\tau'$.

CQFD

On peut donc définir une catégorie dont les objets sont les complexes de chaînes et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes de chaînes. On dira qu'un morphisme de chaîne $\tau : C \to C'$ est une <u>équivalence de chaînes</u> si $[\tau]$ est une équivalence la catégorie "homotope" des complexes de chaînes (ie s'il existe $\eta : C' \to C$ telle que $[\tau\eta] = [\eta\tau] = id$)

> <u>Théorème</u> : Si $\tau, \tau' : C \to C'$ sont deux morphismes de chaînes homotopes, alors : $\tau_* = \tau'_* : H(C) \to H(C')$.

preuve : Soit $D : \tau \simeq \tau'$ et $z \in Z_q(C)$.
On a : $\partial'_{q+1} D_q(z) = \tau_q(z) - \tau'_q(z) \Rightarrow \{\tau_q(z)\} = \{\tau'_q(z)\} \in H_q(C')$
donc $\tau_* \{z\} = \tau'_* \{z\}$

<u>Corollaire</u> : Tout complexe de chaînes contractible est acyclique

Il faut d'abord définir :
<u>Définition</u> : On appelle <u>contraction</u> d'un complexe de chaînes C toute homotopie de $1_C : C \to C$ (identité) au morphisme de chaînes nul $0_C : C \to C$. <u>Le complexe de chaînes C est contractible</u> s'il possède une contraction, et <u>acyclique</u> si $H(C) = 0$ (ie $H_q(C) = 0 \ \forall q$)

preuve : Si C est tel que $1_C \simeq 0_C$, on a $(1_C)_* = (0_C)_*$, mais $(1_C)_* = 1_{H(C)}$ et $(0_C)_* = 0_{H(C)}$ donc $1_{H(C)} = 0_{H(C)} \Leftrightarrow H(C) = 0$.
CQFD

<u>Remarque</u> : La réciproque de ce corollaire est fausse. Contre-ex : $C_q = 0$ si $q \notin \{0,1,2\}$ et $C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$ égal à

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n & \mapsto & 0 \\ & & 2m+1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

C est acyclique et non contractible :

$H_q(C) = 0$ si $q \notin \{0,1,2\}$

$H_0(C) = Z_0(C) / B_0(C) = \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 = \{0\}$

$H_1(C) = Z_1(C) / B_1(C) = 2\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \{0\}$

$H_2(C) = 0/0 = \{0\}$

D'autre part, si $D : 1_C \simeq 0_C$ est une contraction de C, on aurait :
$\partial_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q(z) = z - 0 \Rightarrow \underbrace{\partial_2 D_1}_{=0} + D_0 \partial_1(z) = z$ et $\partial_1 = \beta$
aurait un inverse $D_0 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$, mais tous les homomorphismes de $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ sont triviaux !

Théorème : Soit C un complexe de chaînes libre, alors :

C est acyclique $\Longleftrightarrow$ C est contractible.

preuve : Montrons qu'un complexe de chaînes libre acyclique est contractible.

$\forall q \in \mathbb{Z}$ $\partial_q : C_q \longrightarrow B_{q-1}(C) = Z_{q-1}(C)$ est surjective.
Comme C_{q-1} est libre, $Z_{q-1}(C)$ aussi, et il existe un homomorphisme $s_{q-1} : Z_{q-1}(C) \longrightarrow C_q$ qui est l'inverse à droite de ∂_q.

$1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q : C_q \longrightarrow Z_q(C)$, et posons $\{D_q\}$:

Alors :
$$D_q = s_q(1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q) : C_q \longrightarrow C_{q+1}$$

$$\partial_{q+1} D_q + D_{q-1}\partial_q = 1_{C_q} - s_{q-1}\partial_q + s_{q-1}(1_{C_{q-1}} - s_{q-2}\partial_{q-1})\partial_q = 1_{C_q}$$
montre que $\{D_q\}$ est une contraction de C.

CQFD

Cette méthode de démonstration est standard lorsqu'il s'agit de construire des morphismes de chaînes et des homotopies ~~dans~~ d'un complexe de chaînes libres ~~vaise~~ vers un complexe de chaîne acyclique, et donne lieu à ce que l'on appelle la "méthode des modèles acycliques"

2°/ Sur la méthode des modèles acycliques.

(ref. Eilenberg et Mac Lane, Acyclic models, American journal of mathematics vol 79 p 189-199, 1953)

a) <u>Catégorie avec modèle</u> : Une <u>catégorie avec modèle</u> est une catégorie $\mathcal{C}$ et un ensemble $\mathcal{M}$ d'objets de $\mathcal{C}$ appelés modèles. Soit G un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{C}$ avec modèle $\mathcal{M}$ vers la catégorie des groupes abéliens. Une <u>base de G</u> est une famille $\{g_j \in G(M_j)\}_{j\in J}$ où $\mathcal{M} = \{M_j\}_{j\in J}$ telle que

$\forall X$ objet de $\mathcal{C}$ $\quad \{G(\beta)(g_j)\}_{j\in J \text{ et } \beta \in \mathrm{Hom}(M_j, X)}$ est une base de $G(X)$. ie $G(X) = \mathbb{Z}^{(\{G(\beta)(g_j)\}_{j\in J, \beta\in\mathrm{Hom}(\,)})}$

G est un <u>foncteur libre</u> sur $\mathcal{C}$ muni du modèle $\mathcal{M}$ si G possède une base. ~~si G possède une base. vers la catégorie des complexes de chaînes~~

Soit G un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ muni du modèle $\mathcal{M}$ vers la catégorie des complexes de chaînes. On dira que G est libre si tout G_q est un foncteur libre dans la catégorie des groupes abéliens.

exemples :

1) K = complexe simplicial et $\mathcal{C}(K)$ = catégorie des sous-complexes de K (partiellement ordonnée). Soit $\mathcal{M}(K) = \{\bar{s} \,/\, s \in K\}$ le modèle de $\mathcal{C}(K)$ ($\bar{s}$ = ensemble des faces de s).

Le foncteur covariant C qui associe à tout sous-complexe de K son complexe de chaîne orienté $C(K)$ est un foncteur positif libre sur $\mathcal{C}(K)$ dont le modèle est $\mathcal{M}(K)$ dans la catégorie des complexes de chaînes.

Si $\bar{s}$ est un modèle de dimension q, on choisit un q-simplexe orienté $\sigma(s)$ qui engendre $C_q(\bar{s})$. Alors $\{\sigma(s) \,/\, \dim s = q\}_{s \in K}$ est une base de C_q. Alors C_q est libre avec les modèles $\mathcal{M}(K)$.

2) $\mathcal{C}$ = catégorie des e.t.

$\mathcal{M} = \{\Delta^q \,/\, q \geq 0\}$

Δ = foncteur chaînes singulières (cf. I 5°)

Δ est libre et positif sur $\mathcal{C}$ muni du modèle $\mathcal{M}$. Si $\xi_q : \Delta^q \subseteq \Delta^q$, le singleton $\{\xi_q \in \Delta_q(\Delta^q)\}$ est une base pour Δ_q. On a, en effet :

$\Delta_q(X) = \mathbb{Z}^{(\Delta_q(\beta)(\xi_q))_{\beta \in \mathrm{Hom}(\Delta^q, X)}} = \mathbb{Z}^{(\mathrm{Hom}(\Delta^q, X))}$.

b) Théorème fondamental

Si G est un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie des chaînes complexes, on peut définir le foncteur $H_q(G)$ ($q \in \mathbb{Z}$) de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des groupes abéliens qui à chaque objet X fait correspondre le groupe $H_q(G(X))$.

Si $\mathcal{C}$ possède le modèle $\mathcal{M}$, on dit qu'un foncteur G de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des complexes de chaînes est acyclique de (en) dimensions positives si $H_q(G(M)) = 0 \quad \forall q > 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}$

Théorème des modèles acycliques :

$\mathcal{C}$ = catégorie munie des modèles $\mathcal{M}$

G, G' = foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans la cat. des complexes de chaînes /

- G est libre et positif
- G' est acyclique de (en) dimensions positives

Alors :

(a) Toute transformation canonique $H_0(G) \to H_0(G')$ est induite par un morphisme de chaînes naturel $\tau : G \to G'$ (ie si $X \in \mathcal{C}$ $\exists \tau(X) : G(X) \to G'(X)$ morph. de chaîns, et diag $\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{\tau(X)} & G'(X) \\ G(\beta)\downarrow & & \downarrow G'(\beta) \\ G(Y) & \xrightarrow{\tau(Y)} & G'(Y) \end{array}$ com.)

(b) 2 morphismes de chaînes naturelles $\tau, \tau' : G \to G'$ qui induisent la même transformation naturelle $H_0(G) \to H_0(G')$ sont naturellement homotopes en tant que chaînes.

preuve : cf. 4.2.8 p 165. (...)

3°/ The mapping cone

Si $\tau : C \to C'$ est un morphisme de chaîne, le "mapping cone" de τ est le complexe de chaînes $\bar{C} = \{\bar{C}_q, \bar{\partial}_q\}$ défini par :

$$\bar{C}_q = C_{q-1} \oplus C'_q$$

$$\bar{\partial}_q(c, c') = (-\partial_{q-1}(c), \tau(c) + \partial'_q(c'))$$

où $c \in C_{q-1}$ et $c' \in C'_q$, de sorte que :

lemme : $\bar{C}$ est un complexe de chaînes, et si C et C' sont des complexes de chaînes libres, $\bar{C}$ est libre.

L'intérêt de cette définition réside dans le :

Théorème : Un morphisme de chaîne est une équivalence ssi son mapping cone est un complexe contractible.

preuve : Si $\tau : C \to C'$ est une équivalence, il existe $\tau' : C' \to C$ et $D : C \to C$, $D' : C' \to C'$ tels que :

$$D : \tau'\tau \simeq 1_C \quad \text{et} \quad D' : \tau\tau' \simeq 1_{C'}$$

Posons :

$$\bar{D} : \bar{C} \to \bar{C}$$

$$(c, c') \mapsto (c_1, c_2) \quad \text{où} \quad \begin{cases} c_1 = D(c) + \tau' D' \tau(c) - \tau'\tau D(c) + \tau'(c') \\ c_2 = D'\tau D(c) - D'D'\tau(c) - D'(c') \end{cases}$$

$\bar{D}$ est une contraction de $\bar{C}$.

Inversement, si $\bar{D}$ est une contraction de $\bar{C}$ posons $\tau' : C' \to C$ et $D : C \to C$, $D' : C' \to C'$ définis par les équations

$$(\tau'(c'), -D'(c')) = \bar{D}(0, c')$$

$$(D(c), .) = \bar{D}(c, 0)$$

On vérifie alors que τ' est un morphisme de chaîne tel que $D : \tau'\tau \simeq 1_C$ et $D' : \tau\tau' \simeq 1_{C'}$ donc τ est une équivalence. CQFD

Corollaire : Un morphisme de chaînes entre 2 complexes de chaînes libres est une équivalence ssi son mapping cone est acyclique.

preuve : cf lemme ci-dessus et dernier théorème du § II-1°/.

III Homologie des complexes simpliciaux

1°/ Complexes de chaîne augmentés (c.c.a)

Dans la catégorie des complexes simpliciaux non vides, un complexe P formé d'un seul vertexe s'appelle un objet terminal. Si K est un complexe simplicial non vide, le morphisme

$$K \xrightarrow{f} P$$

possède un inverse à droite g (ie $fg = 1_P$) de sorte que l'application induite $H(f) : H(K) \longrightarrow H(P)$ possède aussi un inverse à droite (ie $H(f)H(g) = 1_{H(P)}$). Comme $H_q(P) = 0$ si $q \neq 0$ et $H_0(P) = C_0(P) \simeq \mathbb{Z}$ on obtient un morphisme surjectif $H_0(f) : H_0(K) \longrightarrow H_0(P) \simeq \mathbb{Z}$.
Comme $H_0(K) = C_0(K) / \partial_1 C_1(K)$, il existe un épimorphisme $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon \partial_1 = 0$.

De même, dans la catégorie des espaces topologiques non vides X, tout ensemble réduit à 1 seul élément s'appelle un objet terminal, et le même raisonnement montre l'existence d'un épimorphisme $\varepsilon : \Delta_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon \partial_1 = 0$. Cela donne tout son intérêt à la définition :

<u>Définition</u> : Une <u>augmentation</u> (sur $\mathbb{Z}$) d'un complexe de chaînes C est un épimorphisme $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon \partial_1 : C_1 \to C_0 \to \mathbb{Z}$ soit trivial. Un <u>complexe augmenté</u> est un complexe positif C muni d'une augmentation.

On peut considérer une augmentation de C comme un morphisme de chaînes surjectif de C sur le complexe de chaînes $\mathbb{Z}$ (ie par déf. sur $\mathbb{Z} = \ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$ où le seul groupe non trivial est celui de degré 0). Il est clair que $H_q(\mathbb{Z}) = 0$ si $q \neq 0$ et $H_0(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, et que ε induit un épimorphisme $\varepsilon_* : H_0(C) \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui permet d'affirmer que le groupe $H_0(C)$ de degré 0 d'un complexe augmenté n'est jamais trivial.

Le complexe de chaînes orienté $C(K)$ d'un complexe simplicial non vide K est augmenté par l'homomorphisme :

$$\varepsilon : C_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad [v] \longmapsto 1$$

où v est un vertexe de K. En effet $\varepsilon \circ \partial_1([v_0, v_1]) = \varepsilon([v_1] - [v_0]) = \varepsilon[v_1] - \varepsilon[v_0] = 0$.
Le complexe de chaînes singulier $\Delta(X)$ de l'e.t. non vide X est augmenté par l'homomorphisme $\varepsilon : \Delta_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\sigma \longmapsto 1$ sur tout 0-simplexe σ de X.

On dit que le morphisme de chaînes (on notera m.c. dorénavant) $\tau : C \to C'$ préserve l'augmentation si $\varepsilon' \circ \tau = \varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$ (ie τ_* aussi, ie $\varepsilon'_* \circ \tau_* = \varepsilon_* : H_0(C) \to \mathbb{Z}$)

2°/ groupe d'homologie réduit

C = complexe de chaînes augmenté

$$C = \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{} 0$$ ~~où $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$~~

Le complexe de chaînes réduit $\tilde{C}$ de C est défini par :

$$\begin{cases} \tilde{C}_q = C_q \text{ si } q \neq 0 \\ \tilde{C}_0 = \operatorname{Ker} \varepsilon \end{cases} \quad \text{et } \tilde{\partial}_q = \partial_q$$

$$\tilde{C} = \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0 = \operatorname{Ker}\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

De sorte que $\tilde{C} = \operatorname{Ker} \varepsilon$ où $\varepsilon : C \to \mathbb{Z}$ est un m.c.

Notons que $\partial_1(\tilde{C}_1) \subset \tilde{C}_0$ car $\varepsilon \partial_1 = 0$, que si $\tau : C \to C'$ est un m.c. qui préserve l'augmentation, τ induit un m.c. $\tilde{C} \to \tilde{C}'$ (en posant $\tilde{\tau}_0 : \tilde{C}_0 \to \tilde{C}'_0$; $\tilde{\tau}_0(z) = \tau_0(z)$ puisque si $z \in \operatorname{Ker}\varepsilon$ $\tau(z) \in \operatorname{Ker} \varepsilon' = \tilde{C}'_0$) et que $\tilde{C} \hookrightarrow C$.

Définition : Le groupe d'homologie réduit de C est égal au groupe d'homologie $H(\tilde{C})$. On note $\tilde{H}(C) \doteq H(\tilde{C})$

Notations :

Si K est un complexe simplicial non vide, $\tilde{H}(K) \doteq \tilde{H}(C(K))$

Si X est un e.t. non vide, $\tilde{H}(X) \doteq \tilde{H}(\Delta(X))$

NB : $\tilde{H}(\emptyset)$ n'existe pas car $\emptyset$ n'a pas d'augmentations, ce qui montre que $\emptyset$ sera souvent un cas particulier.

lemme 1 : Si C est un c.c.a. on a :

$$H_q(C) \simeq \begin{cases} \tilde{H}_q(C) & \text{si } q \neq 0 \\ \tilde{H}_0(C) \oplus \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

preuve : $\mathbb{Z}$ est un groupe libre donc $C_0 \simeq \tilde{C}_0 \oplus \mathbb{Z}$. Alors $Z_q(C) = Z_q(\tilde{C})$ si $q \neq 0$, $Z_0(C) \simeq Z_0(\tilde{C}) \oplus \mathbb{Z}$ } en effet,
et $B_q(C) = B_q(\tilde{C})$ $\forall q \in \mathbb{Z}$.

CQFD

$$Z_0(C) = \{ z \in C_0 \ / \ \partial_0 z = 0 \}$$
$$Z_0(\tilde{C}) = Z(\tilde{C}_0) = \{ z \in \tilde{C}_0 = \operatorname{Ker}\varepsilon \ / \ \partial_0 z = 0 \}$$

$\forall z \in C_0$ $z = \tilde{z} + n$ $\tilde{z} \in \tilde{C}_0$ et $n \in \mathbb{Z}$ puisque alors $\varepsilon(z) = n$

et que, inversement $z = (z - \varepsilon(z)) + \varepsilon(z)$ où $\varepsilon(z - \varepsilon(z)) = \varepsilon(z) - \varepsilon(z)\varepsilon(1)$
$= 0 \Rightarrow z - \varepsilon(z) \in \tilde{C}_0$

Si $\tau : C \to C'$ est un m.c. qui conserve l'augmentation, l'isomorphisme du lemme 1 commute avec τ_*, et si C est un c.c.a. libre, $\tilde{C}$ est un c.c. libre.
Le lemme 1 montre aussi que si C est un c.c.a., on a $H_0(C) \neq 0$ et donc C n'est pas acyclique. On peut seulement espérer que $\tilde{C}$ soit acyclique.

<u>Lemme 2</u> : Soit C un c.c.a. Alors $\tilde{C}$ est contractible ssi l'augmentation $\varepsilon : C \to \mathbb{Z}$ est une équivalence de chaînes.

preuve :
Soit $\bar{C}$ le mapping cone du m.c. $\varepsilon : C \to \mathbb{Z}$. Ici $\bar{C}_0 = \mathbb{Z}$ et $\bar{C}_q = C_{q-1}$ si $q>0$, et $\bar{\partial}_1 = \varepsilon$, $\bar{\partial}_q = -\partial_{q-1}$ si $q>1$ (cf II 3%). On sait que ε est une équivalence de chaînes ssi $\bar{C}$ est un complexe contractible.
Montrons donc que $\bar{C}$ est un complexe contractible ssi $\tilde{C}$ est contractible.
* Si $\bar{D} : \bar{C} \to \bar{C}$ est une contraction de $\bar{C}$ posons $\tilde{D} : \tilde{C} \to \tilde{C}$ où $\tilde{D}_{q-1} = -\bar{D}_q|_{\tilde{C}_{q-1}}$. Alors $\tilde{D}$ est une contraction de $\tilde{C}$.
* Inversement, si $\tilde{D}$ est une contraction de $\tilde{C}$ on pose :

$$\bar{D} : \bar{C} \longrightarrow \bar{C}$$

où $\bar{D}_0 : \mathbb{Z} \to C_0$ est l'inverse à droite de $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$
$\bar{D}_1 : C_0 \to C_1$ est 0 sur $\bar{D}_0(\mathbb{Z})$ et $-\tilde{D}_0$ sur $\tilde{C}_0$
$\bar{D}_q : C_{q-1} \to C_q$ est égal à $-\tilde{D}_{q-1}$ si $q>1$
Alors $\bar{D}$ est une contraction de $\bar{C}$.
CQFD

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec modèles $\mathcal{M}$.
Un foncteur G' de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des c.c.a (et des applications de chaînes préservant l'augmentation) est dit <u>acyclique</u> si $\tilde{G}'(M)$ est acyclique pour tout $M \in \mathcal{M}$.
On obtient la version suivante du théorème des modèles acycliques pour les c.c.a. :

<u>Théorème (des modèles acycliques)</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec modèles $\mathcal{M}$ et G, G' deux foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des c.c.a tels que G soit libre et G' soit acyclique. Il existe une application de chaînes naturelle conservant l'augmentation de G à G', et deux telles applications sont naturellement homotopes en tant qu'applications de chaînes.

preuve : Soit $\{g_j \in G_0(M_j)\}_{j\in J_0}$ une base pour G_0.

Le lemme 1 donne $\varepsilon' : H_0(G'(M_j)) \simeq \mathbb{Z}$, et il existe un unique $z_j \in H_0(G'_0(M_j))$ tel que $\varepsilon'(z_j) = \varepsilon(g_j)$

On définit la transformation naturelle :

$$H_0(G) \longrightarrow H_0(G')$$

$$\left[\sum n_{ij} G_0(f_{ij})(g_j)\right] \in H_0(G(X)) \longmapsto \sum n_{ij}\, G'_0(f_{ij}) z_j \in H_0(G'(X)) \qquad j \in J_0$$

et $f_{ij} \in \mathrm{Hom}(M_j, X)$, et où X désigne un objet de $\mathcal{C}$.

C'est l'unique transformation naturelle $H_0(G) \to H_0(G')$ commutant avec les augmentations. On applique alors le théorème des modèles acycliques p 7.

CQFD

<u>Corollaire</u> : Soient G et G' deux foncteurs covariants respectivement libre et acyclique de la catégorie $\mathcal{C}$ ayant les modèles $\mathcal{M}$ dans la catégorie des c.c.a. . Alors G et G' sont naturellement équivalentes en tant que chaînes. En fait, n'importe quel morphisme de chaînes naturel de G à G' préservant l'augmentation est une équivalence de chaînes naturelle.

preuve :

Soit $\tau : G \to G'$ une application naturelle de chaînes préservant l'augmentation (Il en existe d'après le th. précédent). Toujours grâce au th précédent, il existe une appl. naturelle de chaînes $\tau' : G' \to G$ préservant l'augmentation et aussi deux homotopies de chaînes naturelles $D : \tau' \circ \tau \simeq 1_G$ et $D' : \tau \circ \tau' = 1_{G'}$

CQFD

NB : Sous les hypothèses du Th. précédent, il existe une et une seule transformation naturelle de $H(G)$ dans $H(G')$ commutant avec les augmentations. C'est l'homomorphisme induit par une quelconque morphisme de chaînes naturel préservant l'augmentation de G à G'.

Problème : Comparer le complexe de chaines $C(K)$ d'un complexe simplicial K et le complexe de chaines singulières $\Delta(|K|)$ associé à $|K|$.
C'est dans ce but que l'on introduit le complexe de chaînes $\Delta(K)$ situés juste entre eux deux :

Soit K un complexe simplicial. Un q-simplexe ordonné de K est une suite $v_0, \ldots, v_q$ de $q+1$ vertex appartenant à un simplexe de K.
On notera $(v_0, \ldots, v_q)$ un tel q-simplex ordonné. Si $q<0$, il n'y a pas de q-simplexes ordonnés. Un 0-simplexe ordonné (v) est aussi un 0-simplexe orienté $[v]$.
On définit alors le complexe de chaines ordonnées de K, $\Delta(K) = \{\Delta_q(K), \partial_q\}$ où $\Delta_q(K)$ est le groupe abélien libre de base les q-simplexes ordonnés de K, et où ∂_q est défini par :

$$\partial_q (v_0, v_1, \ldots, v_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q)$$

$\Delta(K)$ est un complexe de chaînes libre positif. Si $K \neq \emptyset$, $\Delta(K)$ est augmenté par l'augmentation $\varepsilon(v) = 1$ pour tout vertex v de K.
Si $\varphi : K_1 \to K_2$ est une application simpliciale, il existe une application de chaine préservant l'augmentation :

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi) \ : \ \Delta(K_1) &\longrightarrow \Delta(K_2) \\ (v_0, \ldots, v_q) &\longmapsto (\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_q)) \end{aligned}$$

Ainsi :

5. Théorème : Il existe un foncteur covariant Δ de la catégorie des complexes simpliciaux non vides dans la catégorie des complexes de chaînes libres augmentés qui à chaque K fait correspondre le complexe de chaînes ordonnées $\Delta(K)$.

Rappelons que nous avons posé :

$C(K) =$ complexe de chaînes orientées $\{C_q(K), \partial_q\}$ construit à partir du complexe simplicial K à partir des q-simplexes orientés $[v_0, v_1, \ldots, v_q]$ = classe d'équivalence d'un ensemble de $q+1$ vertexes pour la relation " à même orientation que ".

Homologie singulière

(ref: Crumeyrolle - Bases géom. de la topo. algébrique Fac de Toulouse)

I Définitions

1°/ p-simplexe standard

Une famille de vertexes $\{v\}$ et de simplexes $\{s\}$ constituent un complexe simplicial si 1) s est un ensemble non vide de vertexes
2) tout vertex v constitue un simplexe
3) tout sous-ensemble d'un simplexe est encore un simplexe.

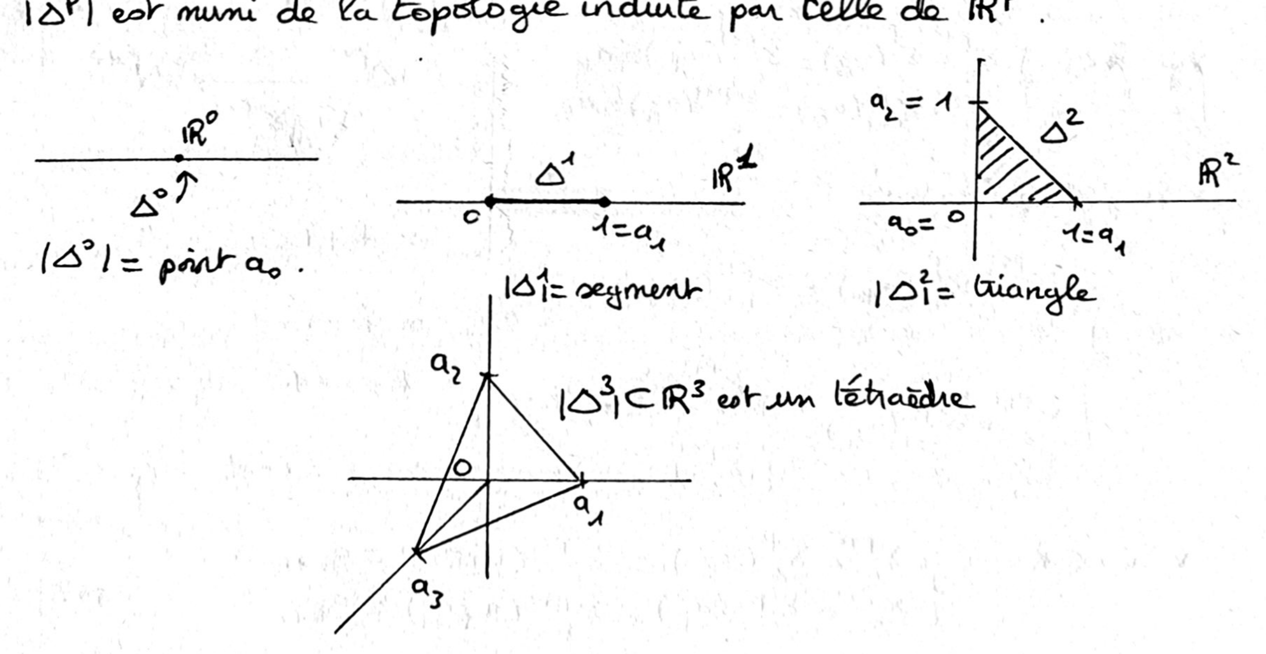
Si s est constitué de $p+1$ objets, on dira que $s = \{v_0, \dots, v_p\}$ est un p-simplexe. Les éléments $v_0, \dots, v_p$ de s s'appellent aussi des sommets et tout sous-ensemble à $q+1$ éléments de s s'appelle une q-face de s.

On considère maintenant $p+1$ points $a_0, \dots, a_p$ de $\mathbb{R}^p$ formant une base affine de $\mathbb{R}^p$. Par exemple :

$$\begin{cases} a_0 = (0, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p \\ a_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ a_2 = (0, 1, \dots, 0) \text{ etc} \dots \end{cases}$$

$\Delta^p = (a_0, \dots, a_p)$ s'appelle le p-simplexe abstrait standard.
$|\Delta^p|$ = p-simplexe géométrique = ensemble des points de $\mathbb{R}^p$ de coordonnées barycentriques $x_0, \dots, x_p$ dans le repère affine $a_0, \dots, a_p$ tels que $x_i \geq 0$ et $x_0 + \dots + x_p = 1$. (Ainsi $x \in |\Delta^p|$ se note $x = x_0 a_0 + \dots + x_p a_p$ ce qui signifie que $x = x_1(a_1 - a_0) + \dots + x_p(a_p - a_0)$ dans la base $a_1 - a_0, \dots, a_p - a_0$.)

$|\Delta^p|$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^p$.



Aux q-faces de Δ^p correspondent des q-faces géométriques (propres si $q<p$). Un point x est dit intérieur à $|\Delta^p|$ si toutes ses coordonnées barycentriques sont $\neq 0$. La réunion de toutes les faces propres de $|\Delta^p|$ s'appelle la fermeture du simplexe $|\Delta^p|$ et se note $|\dot{\Delta}^p|$. Enfin, $|\Delta^p| \setminus |\dot{\Delta}^p|$ = p-simplexe géométrique ouvert = ens. des points intérieurs.

Application γ_i^p $(0 \leq i \leq p+1)$

$$\gamma_i^p : \Delta^p \longrightarrow \Delta^{p+1}$$ ~~s'appelle l'injection~~

$$a_j \longmapsto a_j \text{ si } j<i$$
$$a_j \longmapsto a_{j+1} \text{ si } j \geq i$$

ce qu'on note $\gamma_i^p(a_0, \dots, a_p) = (a_0, \dots, \hat{a}_i, a_{i+1}, \dots, a_{p+1})$ $(i \leq p)$

$\gamma_{p+1}^p \doteq$ injection canonique de Δ^p dans Δ^{p+1}

On définit γ_i^p sur le p-simplexe géométrique $|\Delta^p|$ par :

$$\gamma_i^p\left(\sum_{j=0}^{p} x_j a_j\right) = \sum_{j=0}^{p} x_j \gamma_i^p(a_j) \quad \text{(application affine)}$$

NB : $\gamma_i^p : |\Delta^p| \to |\Delta^{p+1}|$ est continue (il suffit d'évaluer les coordonnées cartésiennes de γ_i^p)

<u>lemme 1</u> : Si $0 \leq j < i \leq p+2$ $\quad \gamma_i^{p+1} \circ \gamma_j^p = \gamma_j^{p+1} \circ \gamma_{i-1}^p$

ie le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p & \xrightarrow{\gamma_j^p} & \Delta^{p+1} \\ \downarrow \gamma_{i-1}^p & & \downarrow \gamma_i^{p+1} \\ \Delta^{p+1} & \xrightarrow[\gamma_j^{p+1}]{} & \Delta^{p+2} \end{array}$$

preuve : vérification directe en distinguant 3 cas :

* Si $k<j$
$$\begin{cases} \gamma_i^{p+1} \circ \gamma_j^p(a_k) = \gamma_i^{p+1}(a_k) = a_k \\ \gamma_j^{p+1} \circ \gamma_{i-1}^p(a_k) = \gamma_j^{p+1}(a_k) = a_k \end{cases}$$

* Si $j \leq k < i$ on a :

$$\begin{cases} \gamma_i^{p+1} \circ \gamma_j^p(a_k) = \gamma_i^{p+1}(a_{k+1}) = \begin{cases} a_{k+1} & \text{si } k+1<i \\ a_{k+2} & \text{si } k=i-1 \end{cases} \\ \gamma_j^{p+1} \circ \gamma_{i-1}^p(a_k) = \begin{cases} \gamma_j^{p+1}(a_k) = a_{k+1} & \text{si } k<i-1 \\ \gamma_j^{p+1}(a_{k+1}) = a_{k+2} & \text{si } k=i-1 \end{cases} \end{cases}$$

* Si $i \leq k$
$$\begin{cases} \gamma_i^{p+1} \circ \gamma_j^p(a_k) = \gamma_i^{p+1}(a_{k+1}) = a_{k+2} \\ \gamma_j^{p+1} \circ \gamma_{i-1}^p(a_k) = \gamma_j^{p+1}(a_{k+1}) = a_{k+2} \end{cases}$$

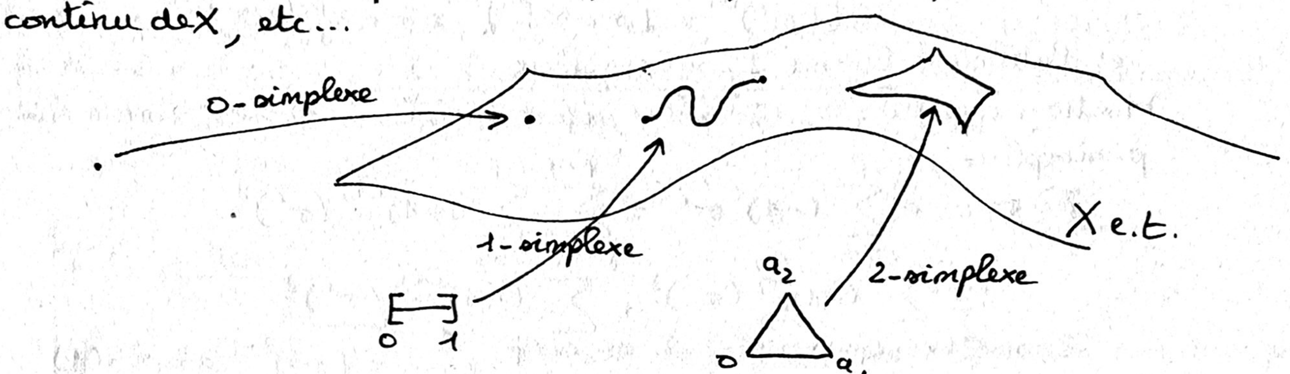
CQFD

2° p-simplexes singuliers et p-chaînes singulières

Définition : Soient X un e.t. et $p \in \mathbb{N}$. Un p-simplexe singulier (ou "topologique") de X est une application continue $\sigma : |\Delta^p| \longrightarrow X$
Si $p > 0$ et $0 \leq i \leq p$, on appelle i-face de σ le $(p-1)$-simplexe $\sigma^i \doteq \sigma \circ \delta_i^{p-1} : |\Delta^{p-1}| \longrightarrow X$

NB : 1) On confond parfois le p-simplexe σ de X et l'image $\sigma(|\Delta^p|)$ en faisant un abus de langage.

2) Un 0-simplexe est un pt de X, un 1-simplexe est un chemin continu de X, etc...



Groupe $\Delta_p(X)$ des p-chaînes singulières.

On veut définir un complexe de chaîne (singulier) :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} \Delta_0(X) \xleftarrow{\partial_1} \Delta_1(X) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Delta_{p-1}(X) \xleftarrow{\partial_p} \Delta_p(X) \longleftarrow \cdots$$

comme suit :

$\Delta_p(X) \doteq$ groupe abélien libre engendré par les p-simplexes singuliers de X = ensemble des p-chaînes $\sum_{j \text{ fini}} \lambda_j \sigma_j$ où $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ et où les σ_j sont des p-simplexes.

∂_q = opérateur bord, défini par :

$$\forall \sigma \text{ p-simplexe de } X \qquad \partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^i$$

(et $\partial_0(\sigma) = 0$ si σ est un 0-simplexe) en étendant ∂_p à toutes les p-chaînes par linéarité.

ex : Si σ est un p-simplexe de $\mathbb{R}^p$, en faisant l'abus de notation $\sigma = (a_0, \ldots, a_p)$ on a :

$$\partial(a_0, \ldots, a_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_p)$$

(NB : Si $X = \emptyset$, on pose $\Delta_p(\emptyset) = 0 \quad \forall p$)

On aura bien défini un complexe de chaînes (noté $\Delta(X)$) si l'on montre le :

lemme 2 : $\partial\partial = 0 \quad$ (ie $\partial_p \partial_{p+1} = 0$)

preuve :

On montre d'abord que si σ est un p-simplexe et si $0 \leq j < i \leq p$, on a : $\quad$ (1) $\quad (\sigma^i)^j = (\sigma^j)^{i-1}$

Il suffit d'écrire : $\begin{cases} (\sigma^i)^j = (\sigma \circ \gamma_i^{p-1})^j = \sigma \circ \gamma_i^{p-1} \circ \gamma_j^{p-2} \\ (\sigma^j)^{i-1} = (\sigma \circ \gamma_j^{p-1})^{i-1} = \sigma \circ \gamma_j^{p-1} \circ \gamma_{i-1}^{p-2} \end{cases}$

et d'utiliser le lemme 1 pour conclure.

Montrons que $\partial\partial = 0$. Si $p \leq 1$, c'est trivial. Si $p \geq 2$, soit σ un p-simplexe :

$$\partial\partial\sigma = \partial \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^i = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+j} (\sigma^i)^j$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} (\sigma^i)^j + \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \underbrace{(\sigma^i)^j}_{= (\sigma^j)^{i-1} \text{ d'après (1)}}$$

$$\partial\partial\sigma = \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} (\sigma^i)^j + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} (-1)^{i+j-1} (\sigma^j)^i = 0$$

CQFD

3°/ Groupes d'homologie

On possède maintenant un complexe de chaînes singulières :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} \Delta_0(X) \leftarrow \cdots \leftarrow \Delta_{p-1}(X) \xleftarrow{\partial_p} \Delta_p(X) \leftarrow \cdots$$

qui permet de définir de manière standard :

$Z_p(X) = \operatorname{Ker} \partial_p$ = groupe des p-cycles

$B_p(X) = \operatorname{Im} \partial_{p-1}$ = groupe des p-bords (inclus dans $Z_p(X)$ car $\partial\partial = 0$)

$H_p(X) = \dfrac{Z_p(X)}{B_q(X)}$ = p-ième groupe d'homologie singulière de X.

ex : Si $X = \{a\}$ est réduit à un point, il n'y a qu'un seul p-simplexe σ_p pour tout $p \geq 0$, donc $\Delta_p(X) = \sigma_p \mathbb{Z}$ et

$$\partial(\sigma_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^i = \begin{cases} \sigma_{p-1} & \text{si } p \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi :

$$Z_p(\{a\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ pair non nul} \\ \Delta_p & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$$

$$B_p(\{a\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ pair} \\ \Delta_p & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$$

$$H_p(\{a\}) = 0 \quad \text{si } p \geq 1$$

Si $p=0$ $Z_0(\{a\}) = \Delta_0(X) = \sigma_0 \mathbb{Z}$ et $B_0(\{a\}) = 0$ donc $H_0(\{a\}) \simeq \mathbb{Z}$

On dira que X est un e.t. homologiquement trivial si son homologie est celle du point, ie si $H_p(X) = 0$ pour $p > 0$ et $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

II Propriétés

Proposition 1 : Si $\{X_i\}_{i \in I}$ désigne la famille des composantes connexes par arcs de X, alors :

$$H_p(X) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_p(X_i)$$

preuve : $|\Delta^p|$ est connexe par arc et $\sigma : |\Delta^p| \to X$ applique $|\Delta^p|$ dans une même composante X_i. Chaque p-chaîne se décompose donc en une somme $c = \sum c_i$ où c_i est une p-chaîne sur X_i. De plus l'opérateur bord opère sur chaque composante connexe.

Proposition 2 : Soit X un e.t. $H_0(X)$ est un groupe abélien libre (ie. un $\mathbb{Z}$-module libre) dont le rang est égal ~~à l'ensem~~ au nombre des composantes connexes de X

preuve : D'après la proposition 1, il suffit de montrer que si X est connexe par arcs alors $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$. ~~Soit $x_0 \in X$ et $\sigma_x \in H_0(X)$~~ (un 0-simplexe) ~~: σ_x est un chemin de x_0 à x quelconque dans X, et : $\partial(\sigma_x) = x - x_0$~~
~~$\forall c \in \Delta_0(X)$ $c = \sum_x \alpha_x x$ où $\alpha_x \in \mathbb{Z}$ et σ_x est une 0-simplexe~~

Soit $x_0 \in X$ fixé. Si $c \in \Delta_0(X)$, $c = \sum_x \alpha_x x$ où $\alpha_x \in \mathbb{Z}$ et $x \in X$.

et $c \in B_0(X) \iff \exists z \in \Delta_1(X) \ / \ c = \partial z$

Mais $z \in \Delta_1(X)$ s'écrit toujours $z = \sum_x \beta_x \sigma_x$ où σ_x est un chemin de x_0 à x dans X (et $x \in X$).

(En effet, tout 1-simplexe de X est un chemin σ de X, et si x, x' sont les extrémités de σ on a : $\sigma = \sigma_{x'} - \sigma_x$)

Donc $\partial(z) = \sum_x \beta_x \partial(\sigma_x) = \sum_x \beta_x (x - x_0) = \sum_x \beta_x x - \left(\sum_x \beta_x\right) x_0$

et $\partial z = c \iff \sum_x \alpha_x = 0$

Ainsi l'application $\Psi : \Delta_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un homomorphisme

$$c \longmapsto \sum_x \beta_x$$

de groupes de $\Delta_0(X)$ sur $\mathbb{Z}$ de noyau $\mathrm{Ker}\,\Psi = B_0$. Donc $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.
CQFD

Propriétés fonctorielles :

A toute application continue $f : X \to Y$ on associe :

$$\Delta_p(f) : \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_p(Y)$$
$$\sigma \longmapsto f \circ \sigma \quad \text{(prolongé par linéarité)}$$

$$H_p(f) : H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$$
$$\dot{c} \longmapsto \overline{\Delta_p(f) c}$$

1) $\Delta_p(f)$ est bien définie puisque si σ est un p-simplexe de X, $f \circ \sigma$ est un p-simplexe de Y. On a $\Delta_p(Id) = Id$, $\Delta_p(g \circ f) = \Delta_p(g) \circ \Delta_p(f)$ et il est clair que $\Delta_p(f)$ commute avec les différentielles :

$$\partial \Delta_p(f) = \Delta_{p-1}(f) \partial$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p(X) & \xrightarrow{\Delta_p(f)} & \Delta_p(Y) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \Delta_{p-1}(X) & \xrightarrow[\Delta_{p-1}(f)]{} & \Delta_{p-1}(Y) \end{array}$$

Notons $\Delta(X)$ le complexe de chaînes singulières $\bigoplus_{p \geq 0} \Delta_p(X)$ et définissons les morphismes entre complexes de chaînes de la façon suivante : un morphisme de chaînes $\varphi : C \to C'$ est une famille $\{\varphi_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ de morphismes de groupes $\varphi_p : C_p \to C'_p$ qui commute avec les différentielles. Rappelons qu'un complexe de chaîne $C = \{C_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ est un groupe gradué différentiel $\cdots \xleftarrow{\partial} C_{p-1} \xleftarrow{\partial_p} C_p \xleftarrow{\partial_{p-1}} \cdots$, $\partial_p \partial_{p-1} = 0$, dont la différentielle est de degré -1. (cf. Spannier, Algebraic topology). Avec ces définitions, on a :

$\Delta(f) \doteqdot \{\Delta_p(f)\}$ est un morphisme de chaînes, et la correspondance $X \rightsquigarrow \Delta(X)$ et $f \rightsquigarrow \Delta(f)$ définit un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des complexes de chaînes.

2) $H_p(f)$ est bien définie puisque $\Delta_p(f)$ applique les cycles sur les cycles et les bords sur les bords :

$$\begin{cases} \partial c = 0 \Rightarrow \partial \Delta(f) c = \Delta(f)\, \partial c = 0 \\ \Delta(f) \partial c = \partial \Delta(f) c \end{cases}$$

$H(X) \doteq \{H_p(X)\}_{p \in \mathbb{N}}$ est un groupe gradué et la correspondance $X \rightsquigarrow H(X)$ et $f \rightsquigarrow H(f)$ définit un foncteur de la catégorie des e.t. dans la catégorie des groupes gradués.

Les groupes d'homologie sont donc des invariants topologiques.

Homotopie

2 applications continues f et $g : X \to Y$ sont homotopes (on note $f \simeq g$) si l'on peut les "interpoler" par une application continue (on dira que la famille $f_\tau : X \to Y$, $\tau \in [0,1]$, interpole f et g si $f(x,\tau)$ ~~défini~~ $= f_\tau(x)$ définit une application continue $f : X \times [0,1] \to Y$ telle que $f_0 = f$ et $f_1 = g$.)

> **Théorème fondamental** : 2 applications homotopes induisent le même homomorphisme des groupes d'homologie :
> $$f \sim g \Rightarrow H(f) = H(g)$$

preuve :

1) Il suffit de montrer le théorème pour les applications :

$$\lambda_0, \lambda_1 : X \longrightarrow X \times I \qquad \lambda_0(x) = (x,0) \qquad \text{où } I = [0,1]$$
$$\lambda_1(x) = (x,1)$$

En effet, si $F : X \times I \longrightarrow Y$ est une homotopie de f à g, où Y est un e.t. quelconque, on a $f = F \circ \lambda_0$ et $g = F \circ \lambda_1$ donc :

$$H_p(f) = H_p(F \circ \lambda_0) = H_p(F)\, H_p(\lambda_0) = H_p(F)\, H_p(\lambda_1) = H_p(g)$$

2) Pour établir le théorème avec λ_0 et λ_1, il suffit de construire un homomorphisme $P : \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_{p+1}(X \times I)$ qui vérifie :

$$(1) \qquad \partial P + P \partial = \Delta_p(\lambda_1) - \Delta_p(\lambda_0)$$

puisqu'alors pour tout p-cycle z de $Z_p(X)$:

$$\partial P z = \Delta_p(\lambda_1) z - \Delta_p(\lambda_0) z \Leftrightarrow \Delta_p(\lambda_1) z \text{ homologue à } \Delta_p(\lambda_0) z$$

$$\Leftrightarrow H_p(\lambda_1) = H_p(\lambda_0)$$

3) Enfin, il suffira de montrer le 1) pour l'e.t. $X = \mathbb{R}^p$. En effet, si $f, g : X \to Y$ sont homotopes, soit $h : \mathbb{R}^p \to X$ continue. On a $f \circ h$, $g \circ h : \mathbb{R}^p \to Y$ homotopes donc :

$$H_p(f \circ h) = H_p(g \circ h) \Rightarrow H_p(f)\, H_p(h) = H_p(g)\, H_p(h)$$

Mais h est quelconque donc $H_p(h)$ décrit toutes les classes d'homologie de $H_p(X)$ lorsque h varie (cf. $H_p(h)(\dot{\delta}_p) = \overline{\Delta_p(h)\delta_p}$ et $\Delta_p(h)\delta_p = h \circ \delta_p = h$ décrit l'ensemble des cycles $Z_p(X)$ de $\Delta_p(X)$, où

($\delta_p : |\Delta^p| \to \mathbb{R}^p$ est l'identité) abus $\delta_p = |\Delta^p|$ est le p-simplexe standard de $\mathbb{R}^p$). Par suite $H_p(f) = H_p(g)$.

4) <u>Construction de l'opérateur prisme P</u>

On détermine P de sorte que le diagramme (I) soit commutatif pour toute application continue $h : Y \to X$ et pour tout couple (Y, X) :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p(Y) & \xrightarrow{P} & \Delta_{p+1}(Y \times I) \\ \Delta_p(h) \downarrow & & \downarrow \Delta_{p+1}(h \times id) \\ \Delta_p(X) & \xrightarrow[P]{} & \Delta_{p+1}(X \times I) \end{array} \qquad (I)$$

Prenons $Y = \mathbb{R}^p$, $\delta_p = |\Delta^p| \in \Delta_p(\mathbb{R}^p)$ et $\sigma = p$-simplexe de X.
Si le diagramme (I) est commutatif, pour $h = \sigma$ on aura :

$$P(\sigma) = \Delta_{p+1}(\sigma \times id)(P(\delta_p)) \qquad (2)$$

Inversement, si (2) est vraie pour tout simplexe σ et si $s \in \Delta_p(Y)$ est un p-simplexe de Y, posons $\sigma = \Delta_p(h)s = h \circ s$.
Alors :

$$\begin{cases} P(\Delta_p(h)(s)) = P(\sigma) = \Delta_{p+1}(\sigma \times id)(P(\delta_p)) \\ \text{et} \\ \Delta_{p+1}(h \times id)(P(s)) = \Delta_{p+1}(h \times id)\, \Delta_{p+1}(s \times id)(P(\delta_p)) \end{cases}$$

$$= \Delta_{p+1}(h \circ s \times id)(P(\delta_p))$$

$$= \Delta_{p+1}(\sigma \times id)(P(\delta_p))$$

de sorte que le diagramme (I) commute.

Trouver $P : \Delta_p(X) \to \Delta_{p+1}(X \times I)$ rendant le diagramme (I) commutatif revient donc à définir $P(\delta_p)$ et à utiliser (2).

Faisons $X = \mathbb{R}^p$ et cherchons $P(\delta_p) \in \Delta_{p+1}(\mathbb{R}^p \times I)$ de façon à ce que (1) soit vérifié.
$\Delta^p \times I$ a les sommets : $(a_0, 0), \dots, (a_p, 0), (a_0, 1), \dots, (a_p, 1)$
que nous noterons : $A_0, \dots, A_p, B_0, \dots, B_p$

Posons :
$$P(\delta_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(A_0,\dots,A_i,B_i,\dots,B_p) \qquad (3)$$
avec l'abus de langage usuel et vérifions que P satisfait (1) en δ_p :

$$\Delta_p(\lambda_1)(\delta_p)=\lambda_1\circ\delta_p=(B_0,\dots,B_p)$$
$$\Delta_p(\lambda_0)(\delta_p)=\lambda_0\circ\delta_p=(A_0,\dots,A_p)$$

$$\partial P(\delta_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\,\partial(A_0,\dots,A_i,B_i,\dots,B_p)$$
$$=\sum_{0\le j\le i\le p}(-1)^{i+j}(A_0,\dots,\hat{A}_j,\dots,A_i,B_i,\dots,B_p)$$
$$+\sum_{0\le i\le j\le p}(-1)^{i+j+1}(A_0,\dots,A_i,B_i,\dots,\hat{B}_j,\dots,B_p)$$

Si l'on fait $i=j$ dans les 2 paquets, le terme $(A_0,\dots,\hat{A}_i,B_i,\dots,B_p)$ du 1er paquet détruit le terme $-(A_0,\dots,A_{i-1},\hat{B}_{i-1},\dots,B_p)$ du 2e paquet, sauf $(B_0,\dots,B_p)$ et $-(A_0,\dots,A_p)$ qui se conservent.
Ainsi :
$$\partial P(\delta_p)=\sum_{0\le j<i\le p}(-1)^{i+j}(A_0,\dots,\hat{A}_j,\dots,A_i,B_i,\dots,B_p)$$
$$+\sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j+1}(A_0,\dots,A_i,B_i,\dots,\hat{B}_j,\dots,B_p)$$
$$+(B_0,\dots,B_p)-(A_0,\dots,A_p)$$

De même :
$$P\partial(\delta_p)=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\,P(\delta_p\circ\gamma_j^{p-1})=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\,P(\gamma_j^{p-1}) \text{ soit d'après (2) :}$$
$$=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\,\Delta_p(\gamma_j^{p-1}\times id)\,P(\delta_{p-1})$$
où $P(\delta_{p-1})=\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i(A_0,\dots,A_i,B_i,\dots,B_{p-1})$

$$P\partial(\delta_p)=\sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le i\le p-1\\ \text{et } j\le i}}(-1)^{j+i}(A_0,\dots,\hat{A}_j,\dots,A_{i+1},B_{i+1},\dots,B_p)$$
$$+\sum_{\substack{0\le j\le p\\0\le i\le p-1\\ \text{et } j>i}}(-1)^{j+i}(A_0,\dots,A_i,B_i,\dots,\hat{B}_j,\dots,B_p)$$

$$P\partial(\delta_p)=\sum_{0\le j<k\le p}(-1)^{j+k+1}(A_0,\dots,\hat{A}_j,\dots,A_k,B_k,\dots,B_p)$$
$$+\sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j}(A_0,\dots,A_i,B_i,\dots,\hat{B}_j,\dots,B_p)$$

Finalement :

$$\partial P(\delta_p) - P\,\partial(\delta_p) = \Delta_p(\lambda_1)(\delta_p) - \Delta_p(\lambda_0)(\delta_p)$$

Ce qui prouve (1) lorsque $X = \mathbb{R}^p$, et qui permet de conclure grâce au 3) et 1).

CQFD

Homologie singulière relative

(ref. Crumeyrolle)

I Définitions

1°/ Homologie relative

X = e.t $A \subset X$

$\Delta_p(X)$ = groupe abélien libre des p-chaînes singulières de X

$\Delta_p(A)$ = " " " " de A

$\Delta_p(A) \subset \Delta_p(X)$ et $\partial(\Delta_p(A)) \subset \Delta_{p-1}(A)$ de sorte que ∂ induise un homomorphisme $\bar{\partial} = \{\bar{\partial}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p(X) & \longrightarrow & \Delta_p(X)/\Delta_p(A) \\ \partial_p \downarrow & & \downarrow \bar{\partial}_p = \bar{\partial} \\ \Delta_{p-1}(X) & \longrightarrow & \Delta_{p-1}(X)/\Delta_{p-1}(A) \end{array} \qquad \bar{\partial}(\dot{\sigma}) = (\dot{\overline{\partial\sigma}})$$

On a $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$

Définition : $H_p(X,A) \doteq \operatorname{Ker}\bar{\partial}_p / \operatorname{Im}\bar{\partial}_{p+1}$ est le p-ième groupe d'homologie relative de X (mod. A)

* $\operatorname{Ker}\bar{\partial}_p = \{\dot{c} \in \Delta_p(X)/\Delta_p(A) \ / \ \bar{\partial}_p\dot{c} = 0\}$. Comme $\bar{\partial}_p\dot{c} = \dot{\overline{\partial_p c}}$, $\dot{c} \in \operatorname{Ker}\bar{\partial}_p$ possède toujours un représentant $c \in \Delta_p(X)$ tel que $\partial_p c \in \Delta_{p-1}(A)$.

Notons :

$Z_p(X,A) \doteq \{c \in \Delta_p(X) / \partial_p c \in \Delta_{p-1}(A)\} = \partial_p^{-1}(\Delta_{p-1}(A))$ = ensemble des p-cycles relatifs modulo A.

On aura : $\operatorname{Ker}\bar{\partial}_p \simeq Z_p(X,A)/\Delta_p(A)$ (cf suite ex : $0 \to \Delta_p(A) \overset{i}{\hookrightarrow} Z_p(X,A) \overset{proj}{\to} \operatorname{Ker}\bar{\partial}_p \to 0$)

ex : Si σ est un chemin de X, c'est un 1-cycle relatif modulo A ssi ses extrémités sont dans A.

Un p-simplexe singulier de X est un p-cycle relatif modulo A ssi toutes ses faces propres sont dans A.

* $\operatorname{Im}\bar{\partial}_{p+1} = \{\dot{c} \in \Delta_p(X)/\Delta_p(A) \ / \ \exists \dot{\gamma} \in \Delta_p(X)/\Delta_p(A) \quad \dot{c} = \bar{\partial}\dot{\gamma}\}$, mais $\bar{\partial}\dot{\gamma} = \dot{\overline{\partial\gamma}}$

donc $\dot{c} \in \operatorname{Im}\bar{\partial}_{p+1}$ possède toujours un représentant $c \in \Delta_p(X)$ tel qu'il existe $\gamma \in \Delta_{p+1}(X)$ vérifiant $c = \partial_{p+1}\gamma$ modulo $\Delta_p(A)$

Posons :

$B_p(X,A) \doteq \{c \in \Delta_p(X) / \exists \gamma \in \Delta_{p+1}(X) \quad c = \partial_{p+1}\gamma \text{ mod. } \Delta_p(A)\} = \partial_{p+1}(\Delta_{p+1}(X)) + \Delta_p(A)$

C'est, par définition, le groupe des p-bords relatifs modulo A.

On a : $\operatorname{Im}\bar{\partial}_{p+1} \simeq B_p(X,A)/\Delta_p(A)$ (cf. suite ex : $0 \to \Delta_p(A) \overset{i}{\hookrightarrow} B_p(X,A) \overset{proj}{\to} \operatorname{Im}\bar{\partial}_{p+1} \to 0$)

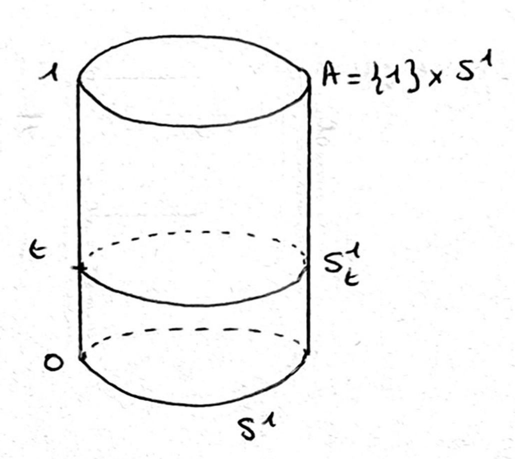
et d'après un résultat classique d'algèbre :

$$H_p(X,A) \simeq Z_p(X,A) / B_p(X,A)$$

Le p-ième groupe d'homologie relative de X modulo A n'est autre que le groupe quotient des p-cycles relatifs par les p-bords relatifs. Si $A = \emptyset$, on retrouve l'homologie singulière déjà étudiée : $H_p(X,\emptyset) = H_p(X)$.

2°/ Exemple :

Soit $X = I \times S^1$. L'application $\sigma_t : s \mapsto (t, e^{i2\pi s})$ définit une 1-chaîne de X qui est un bord relatif modulo A.



En effet, le cylindre limité par $S^1_t \doteqdot \operatorname{Im} \sigma_t$ et A est homéomorphe au rectangle $a_0 a_1 a_2 a_3$ où $a_0 a_3$ est identifié à $a_1 a_2$ et il existe une application

$$\sigma : |\Delta^2| \longrightarrow |(a_0, a_1, a_2)|$$

telle que :

$$\partial\sigma = (a_0\, a_1) + (a_1\, a_2) - (a_0\, a_2)$$

(en désignant par leurs images des applications de $|\Delta^1|$ dans le cylindre). De même, il existe une application

$$\sigma' : |\Delta^2| \longrightarrow |(a_0, a_2, a_3)|$$

telle que :

$$\partial\sigma' = (a_0\, a_2) + (a_2\, a_3) - (a_0\, a_3)$$

Donc : $\partial\sigma + \partial\sigma' = (a_0\, a_1) + (a_2\, a_3)$

$$(a_0\, a_1) = \partial(\sigma + \sigma') - (a_2\, a_3) \quad \text{où } (a_2\, a_3) \in \Delta_1(A)$$

et on a bien $S^1_t \in B_1(X,A)$.

II Propriétés

1°/ Propriétés fonctorielles

Si $f : (X,A) \longrightarrow (X',A')$ est une application continue entre 2 paires d'e.t (ie : $A \subset X$ et $f(A) \subset A'$), $\Delta_p(f) : \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_p(X')$ vérifie $\Delta_p(f)(\Delta_p(A)) \subset \Delta_p(A')$ de sorte que l'on puisse passer au quotient et définir :

$$H_p(f) : \quad H_p(X,A) \longrightarrow H_p(X',A')$$

La correspondance $\{H_p\}_{p\in\mathbb{N}} = H$ définit le foncteur homologie relative modulo A de la catégorie des paires d'e.t et des applications continues entre paires d'e.t., dans la catégorie des groupes gradués, puisque

$$\begin{cases} H_p(Id) = Id \\ H_p(g \circ f) = H_p(g) \circ H_p(f) \end{cases}$$

<u>Cas particulier</u> : Si $\begin{cases} j : (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A) \\ i : A \hookrightarrow X \end{cases}$

on aura : $\begin{cases} H_p(j) : H_p(X) \longrightarrow H_p(X,A) \\ H_p(i) : H_p(A) \longrightarrow H_p(X) \end{cases}$

donc $H_p(ji) : H_p(A) \longrightarrow H_p(X,A)$. Comme $Z_p(A) \subset B_p(X,A)$, car $Z_p(A) \subset \Delta_p(A)$
on a en fait $H_p(ji) = 0$.

ex : Montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_p(A) & \xrightarrow{H_p(i)} & H_p(X) & \xrightarrow{H_p(j)} & H_p(X,A) \\ {\scriptstyle H_p(f)}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_p(A') & \longrightarrow & H_p(X') & \longrightarrow & H_p(X',A') \end{array}$$

2°/ Autres propriétés

Les propositions suivantes généralisent les propositions analogues données pour l'homologie singulière :

<u>Proposition 1</u> : Si $\{X_i\}_{i\in I}$ désigne la famille des composantes connexes par arcs de X et si $A_i = X_i \cap A$:

$$H_p(X,A) \simeq \bigoplus_{i\in I} H_p(X_i, A_i)$$

preuve : cf. chap. Homologie singulière.

Proposition 2 : Soient X un e.t et $A \subset X$. $H_0(X,A)$ est un groupe abélien libre (ie un $\mathbb{Z}$-module libre) dont l'ensemble des générateurs est ~~en bijection~~ égal au nombre des composantes connexes par arcs X_i qui ne coupent pas A.

preuve : Montrons d'abord que si $A \neq \emptyset$ et si X est connexe par arcs, alors $H_0(X,A) = 0$. Soit $x_0 \in A$, $c = \sum \alpha_x x$ est une 0-chaîne de X quelconque. Notons σ_x un chemin de x_0 à x_0, alors :

$$\underbrace{\partial\left(\sum \alpha_x \sigma_x\right)}_{\in B_0(X)} = c - \underbrace{\sum \alpha_x x_0}_{\in \Delta_0(A)}$$

donc $\dot{c} = \dot{0}$ et $H_0(X,A) = 0$.

Cela étant, si $X_i \cap A = A_i = \emptyset$, on a $H_0(X_i, A_i) \simeq H_0(X_i) \simeq \mathbb{Z}$. Le résultat provient de la pro. 1.

CQFD

Invariance des groupes d'homologie relative par homotopie

Définition : On dit que 2 applications continues $f, g : (X,A) \to (X',A')$ entre paires d'e.t. si elles sont homotopes en tant qu'applications de X dans X' et si, F désignant l'homotopie faisant passer de f à g dans X, F applique $A \times [0,1]$ dans A' de sorte que les restrictions de f et g à A soient aussi homotopes.

Théorème ; Si 2 applications continues $f, g : (X,A) \to (X',A')$ entre paires d'e.t. sont homotopes, $H_p(f) = H_p(g) : H_p(X,A) \to H_p(X',A')$.

III Suite exacte d'homologie

On a vu que si $f : (X,A) \to (X',A')$ est une application continue entre 2 paires d'e.t., on possède un homomorphisme

$$H_p(f) : \quad H_p(X,A) \longrightarrow H_p(X',A')$$

En particulier,

$$\begin{cases} j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X,A) \\ i : \quad A \hookrightarrow X \end{cases}$$

donnent les homomorphismes :

$$\begin{cases} H_p(j) : H_p(X) \longrightarrow H_p(X,A) \\ H_p(i) : H_p(A) \longrightarrow H_p(X) \end{cases}$$

On définit l'application bord :

$$\partial : H_p(X,A) \longrightarrow H_{p-1}(A)$$
$$\dot{z} \longmapsto \partial(\dot{z}) \doteq \dot{\overline{\partial z}}$$

Si $z \in Z_p(X,A)$ est un représentant de $\dot{z}$, $\partial z \in \Delta_{p-1}(A)$ vérifie $\partial\partial z = 0$ donc ∂z est un $(p-1)$-cycle de A, et sa classe d'homologie dans A est $\dot{\overline{\partial z}} \in H_{p-1}(A)$. Vérifions que $\dot{\overline{\partial z}}$ ne dépend pas du représentant $z \in Z_p(X,A)$ de $\dot{z}$: si $z' - z \in B_p(X,A)$ $\exists z'' \in \Delta_{p+1}(X)$ tel que $z' - z = \partial z'' + w$ où $w \in \Delta_p(A)$.
Donc $\partial z' - \partial z = \partial w \in \Delta_{p-1}(A) \Leftrightarrow \dot{\overline{\partial z'}} = \dot{\overline{\partial z}}$ dans $H_{p-1}(A)$

Théorème : La suite d'homologie :

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{H_p(i)} H_p(X) \xrightarrow{H_p(j)} H_p(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A) \xrightarrow{H_{p-1}(i)} H_{p-1}(X) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X,A) \longrightarrow 0$$

est exacte.

preuve :

* Pour $H_p(X)$: $H_p(ji) : H_p(A) \to H_p(X,A)$ et $H_p(ji) = 0$ puisque $Z_p(A) \subset \Delta_p(A) \Rightarrow Z_p(A) \subset B_p(X,A)$ et $H_p(ji) = 0$. Donc $\operatorname{Im} H_p(i) \subset \operatorname{Ker} H_p(j)$
Inversement, si $\dot{z} \in H_p(X)$ vérifie $H_p(j)\dot{z} = 0$, soit z un représentant de $\dot{z}$. On a : $\Delta_p(j)(z) \in B_p(X,A) \Leftrightarrow \Delta_p(j)z = \partial z' + a$ où $a \in \Delta_p(A)$
Donc $z = \partial z' + a$ (car j est l'injection canonique !)
et l'on aura : $\dot{z} = \dot{a} = H_p(i)\dot{a} \in \operatorname{Im} H_p(i)$. Ainsi $\operatorname{Im} H_p(i) = \operatorname{Ker} H_p(j)$

* Pour $H_p(X,A)$: $\partial \circ H_p(j) = 0$ car si $\dot{z} \in H_p(X)$, on peut trouver un représentant z de $\dot{z}$ tel que $\partial z = 0 \Rightarrow \partial\dot{z} = \dot{\overline{\partial z}} = 0$
Inversement, si $\dot{z} \in H_p(X,A)$ vérifie $\partial\dot{z} = \dot{\overline{\partial z}} = 0$, $\exists\, w \in \Delta_p(A)$ / $\partial z = \partial w \Rightarrow (z-w) \in Z_p(X)$ donc $\Delta_p(j)(z-w) = z-w$ et $H_p(j)(\dot{\overline{z-w}}) = \dot{z}$.

* Pour $H_{p-1}(A)$: $H_{p-1}(i) \circ \partial = 0$ car si $\dot{z} \in H_p(X,A)$, $\exists z$ représentant de $\dot{z}$ tel que $\partial z \in \Delta_{p-1}(A)$ et $c = \partial z \in B_{p-1}(A) \subset B_{p-1}(X) \Rightarrow \dot{c} = 0$
Donc $H_{p-1}(i) \circ \partial(\dot{z}) = H_{p-1}(i)(\dot{\overline{\partial z}}) = 0$
Inversement, si $\dot{z} \in H_{p-1}(A)$ vérifie $H_{p-1}(i)(\dot{z}) = 0$, soit $z \in Z_{p-1}(A)$ un représentant de $\dot{z}$. On aura $z = \Delta_{p-1}(i) z \in B_{p-1}(X)$ donc $z = \partial z'$ où $z' \in \Delta_p(X)$. En fait, $z' \in Z_p(X,A)$ puisque $\partial z' = z \in Z_{p-1}(A)$, donc $\dot{z} = \dot{\overline{\partial z'}} = \partial \dot{z}' \in \operatorname{Im} \partial$.

CQFD

Cas particulier : Si $A = \{x_0\}$ est réduit à un point, on a $H_p(X) \simeq H_p(X, x_0)$ $(p \geq 1)$: On sait que $H_p(x_0) = 0$ pour $p > 0$, de sorte que la suite exacte d'homologie donne pour $p \geq 2$:

$$0 \longrightarrow H_p(X) \xrightarrow{H_p(j)} H_p(X, x_0) \xrightarrow{\partial} 0$$

ie : $H_p(j)$ est un isomorphisme.

Si $p = 1$, on a : $0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{H_1(j)} H_1(X, x_0) \xrightarrow{\partial} H_0(x_0)$

mais l'application ∂ est alors nulle (en effet, si $z \in Z_1(X, x_0)$ est un chemin de X de a_0 à a_1, $\partial z = a_1 - a_0 \in \Delta_0(x_0)$ donc $a_1 = a_0 = x_0 \Rightarrow \overline{\partial z} = \partial \dot{z} = 0$.)

Exercice : Si $f : (X, A) \longrightarrow (X', A')$, montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(X) & \longrightarrow & H_p(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow \\
& \downarrow{\scriptstyle H_p(f)} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(X') & \longrightarrow & H_p(X',A') & \xrightarrow{\partial} & H_{p-1}(A') & \longrightarrow
\end{array}$$

(Ind : cf. ex II 1°/. La dernière égalité à montrer est :
$H_p(f)(\partial \sigma) = \partial(f \circ \sigma)$ ce qui est évident)

IV Le théorème d'excision

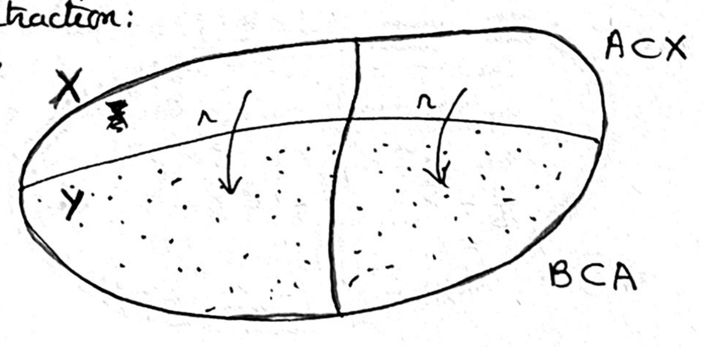
1°/ Rétractions

On appelle rétraction de X dans Y (où $Y \subset X$) toute application continue $r : X \longrightarrow Y$ telle que $r \circ i = id_Y$ (où $i : Y \hookrightarrow X$ désigne l'injection canonique). On définit de manière analogue les rétractions de la paire d'e.t (X, A) dans la paire (Y, B).

On dit que $r : (X,A) \longrightarrow (Y, B)$ est une déformation-rétraction si r est une rétraction et si id_X est homotope à $i \circ r$. (où $i : (Y,B) \hookrightarrow (X, A)$ est l'injection canonique)

On a donc, pour une déformation-rétraction :

$$i \circ r \simeq id_X \quad \text{et} \quad r \circ i = id_Y$$



La fonctorialité jointe à la propriété d'homotopie montre que :

$$\begin{cases} H_p(i) \circ H_p(r) = id_{H_p(X)} \\ H_p(r) \circ H_p(i) = id_{H_p(Y)} \end{cases}$$

de sorte que $H_p(X) \simeq H_p(Y)$ $(\forall p \geq 0)$.

<u>Cas particulier important</u> : On dit que l'e.t. X est <u>contractile</u> s'il existe une déformation-rétraction à l'un de ses points. Il est alors <u>homologiquement trivial</u>, càd que son homologie est celle du point :

$$H_p(X)=0 \text{ si } p>0 \quad \text{et} \quad H_0(X)=\mathbb{Z}$$

<u>Exemples</u> : L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est contractile, puisque si $r : \mathbb{R}^n \to P$ est la rétraction de $\mathbb{R}^n$ sur l'origine P, la relation

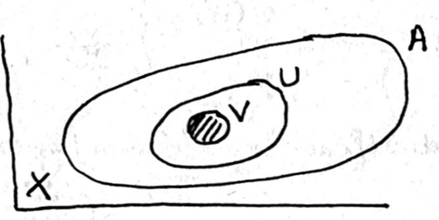
$$f_\tau(x_1,\dots,x_n) = (\tau x_1,\dots,\tau x_n)$$

définit une homotopie entre $i \circ r$ et $id_{\mathbb{R}^n}$. Le même raisonnement montre que tout domaine étoilé de $\mathbb{R}^n$ est contractile.

2°/ <u>Excisions</u>

<u>Définition</u> : Soit $U \subset A \subset X$. L'injection $i : (X\setminus U, A\setminus U) \longrightarrow (X,A)$ est appelée une excision si $H_p(i) : H_p(X\setminus U, A\setminus U) \longrightarrow H_p(X,A)$ est un isomorphisme pour tout $p \in \mathbb{N}$.

<u>Théorème</u> (admis) : Si $U \subset A \subset X$ et si $\overline{U} \subset \mathring{A}$, U peut être excisé dans A.



<u>Proposition</u> : Si $V \subset U \subset A \subset X$ et si :
* V peut être excisé dans A
* $(X\setminus U, A\setminus U)$ est une déformation-rétraction de $(X\setminus V, A\setminus V)$

Alors U peut être excisé dans A

preuve :
$H_p(X\setminus V, A\setminus V) \simeq H_p(X,A)$ par hypothèse. Il suffit donc de montrer que si $i : (X\setminus U, A\setminus U) \longrightarrow (X\setminus V, A\setminus V)$, $H_p(i) : H_p(X\setminus U, A\setminus U) \to H_p(X\setminus V, A\setminus V)$ est un isomorphisme.
Si r est une rétraction de $(X\setminus V, A\setminus V)$ sur $(X\setminus U, A\setminus U)$, on a :

$$i \circ r \simeq id_{X\setminus V} \quad \text{et} \quad r \circ i = id_{X\setminus U}$$

d'où :

$$H_p(i)\,H_p(r) = id_{H_p(X\setminus V)} \quad \text{et} \quad H_p(r)\,H_p(i) = id_{H_p(X\setminus U)}$$

le lien avec l'homologie relative

CQFD

l'homotopie $i \circ r \simeq id_{X\setminus V}$ étant une <u>homotopie de paire</u>, on retrouve $H_p(i)\,H_p(r) = id_{H_p(X\setminus V)}$

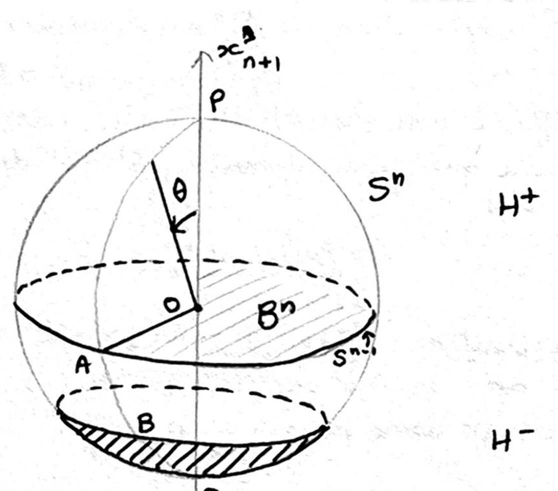
(Invariance de l'homologie relative par homotopie de paires)

V Exemples et applications :

a) Homologie de S^n

Soient H^+ et H^- les hémisphères nord et sud de la sphère S^n, fermés. ($n \geq 1$). On a $H^+ \cap H^- = S^{n-1}$

Proposition : $(H^+, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, H^-)$ est une excision.



preuve : Il faut montrer que l'on peut exciser de H^- l'hémisphère sud ouvert tout entier. Le théorème fondamental ne s'applique pas directement, mais on peut l'appliquer à :

$V = \{x \in S^n \,/\, x_{n+1} < -\frac{1}{2}\}$

car :

$V \subset H^- \subset S^n$ et $\bar{V} \subset \mathring{H}^-$.

D'après la proposition IV 2) il suffit de montrer que (H^+, S^{n-1}) est une déformation-rétraction de $(S^n \setminus V, H^- \setminus V)$

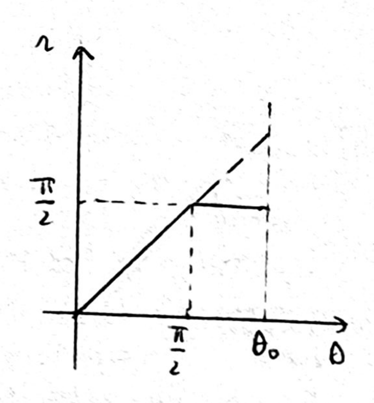
En utilisant une rotation autour de l'axe (PQ), cela se ramène à montrer que dans le plan déterminé par OP et OA le couple (arc PA, A) est une déformation-rétraction du couple (arc PB, arc AB).

Prenons :

$$r(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \theta_0 \geq \theta \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

et définissons l'homotopie :

$$F(\theta, t) = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) t & \text{si } \theta \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



de $i \circ r$ et de l'identité de (arc PB)

CQFD

> **Théorème : (Calcul des groupes d'homologie de S^n)**
>
> ($\bar{1}$) Si $p \geq 1$ et $n \geq 1$ $\quad H_p(S^n) \simeq H_p(B_n, S^{n-1})$
>
> ($\bar{2}$) Si $p \geq 2$ et $n \geq 1$ $\quad H_p(S^n) \simeq H_{p-1}(S^{n-1})$
>
> ($\bar{3}$) $\begin{cases} H_p(S^n) = 0 & \text{si } p \neq 0, n \\ H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z} \end{cases}$

Si $n \geq 1$
NB : $H_0(B_n, S^{n-1}) = 0$ d'après Pro 2 page 2

On peut mieux rédiger la démonstraction en montrant [* preuve de ($\bar{1}$) et ($\bar{2}$) (astérisques 1 et 4 ici) * preuve de ($\bar{3}$) (astérisques 2, 3 et 5 au fur et à mesure que les problèms de calcul de $H^1(B_n, S^{n-1})$, et $H^1(B_1, S^0)$ se posent.

preuve :

B_n = boule fermée de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$. B_n est contractile (puisqu'étoilé dans $\mathbb{R}^n$) donc $H_p(B_n) = 0$ pour $p > 0$.

* Si $p \geq 2$, la suite exacte

$$H_p(B_n) = 0 \longrightarrow H_p(B_n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{p-1}(B_n) = 0$$

montre que $H_p(B_n, S^{n-1}) \simeq H_{p-1}(S^{n-1})$. (1)

Revenons à B_{n+1} et à S^n : la projection banale sur l'hyperplan $x_{n+1} = 0$ donne un homéomorphisme de (H^+, S^{n-1}) sur (B_n, S^{n-1}) donc aussi un ~~homo~~isomorphisme des groupes d'homologie (pour $n \geq 1$) :

Or H^- est contractile et pour $p \geq 2$, $H_{p-1}(H^-) = 0$. La suite exacte :

$$0 = H_p(H^-) \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow H_p(S^n, H^-) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(H^-) = 0 \qquad (p \geq 2)$$

montre que $H_p(S^n) \simeq H_p(S^n, H^-)$ (2)

En conclusion :

$$\begin{cases} H_p(B_n, S^{n-1}) \simeq H_p(H^+, S^{n-1}) \\ H_p(B_n, S^{n-1}) \simeq H_{p-1}(S^{n-1}) \quad (1) \end{cases} \Rightarrow H_{p-1}(S^{n-1}) \simeq H_p(H^+, S^{n-1})$$

D'où : $H_{p-1}(S^{n-1}) \simeq H_p(H^+, S^{n-1}) \underset{\text{(excision)}}{\simeq} H_p(S^n, H^-) \underset{(2)}{\simeq} H_p(S^n)$

Donc (4) $\begin{cases} H_p(S^n) \simeq H_{p-1}(S^{n-1}) & (3) \\ H_p(S^n) \simeq H_p(B_n, S^{n-1}) & (\text{cf } (1) \text{ et } (3)) \end{cases}$

ce qui prouve l'assertion ($\bar{2}$) et l'assertion ($\bar{1}$) lorsque $p \geq 2$.

* Si $p = 1$ et $n \geq 2$, toute 1-chaîne est une combinaison linéaire formelle de chemins. S^{n-1} est connexe par arcs, et un chemin qui définit un 1-cycle de $H_1(B_n, S^{n-1})$ a ses extrémités dans S^{n-1}. Si σ est ce 1-cycle relatif, il correspond à une application σ homotope à $g : [0,1] \longrightarrow [a_0, a_1]$ = segment $[a_0, a_1]$ (car B_n est contractile) cf chap I, § III pro 3 Greenberg ...

S^{n-1}

Si $a_0 \neq a_1$, $\exists$ arc de cercle dans le plan $O a_0 a_1$ contenant un point b_1 tel que $|\Delta^2|$ soit homéomorphe au triangle curviligne $a_0 a_1 b_1$ (facile), de sorte que si γ est cet homéomorphisme,

$$\partial\gamma = a_0 a_1 + a_1 b_1 - a_0 b_1$$
$$a_0 a_1 = \partial\gamma \pmod{S^{n-1}}$$

Si $a_0 = a_1$ $a_0 a_1 \in S^{n-1}$. Dans tous les cas $a_0 a_1$ est un bord relatif, donc $H_1(B^n, S^{n-1}) = 0$ si $n \geq 2$. (5)

* <u>Si $p=1$ et $n=1$</u>, considérons $H_1(B_1, S^0)$.
$B_1 \simeq I = [0,1]$ et on se borne à un 1-cycle relatif qui est un chemin de I reliant les extrémités de I : a_0 et a_1, donc un chemin homotope à l'identité. $H_1(B_1, S^0)$ a au plus 1 générateur. Ce générateur n'est pas nul car si :

$$a_0 a_1 = \partial\gamma + \sum \alpha_i \sigma_i \qquad \sigma_i : I \to \{a_i\} \quad i=0,1$$
$$\partial(a_0 a_1) = a_1 - a_0 = \sum \alpha_i (a_i - a_i) = 0 \Rightarrow a_1 = a_0$$

Donc $H_1(B_1, S^0) = \mathbb{Z}$. (6)

* Notons que si $p=1$ et $n \geq 1$, on a toujours la suite exacte d'<u>homologie</u> :

$$H_1(H^-) = 0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{f} H_1(S^n, H^-) \xrightarrow{g} H_0(H^-) = \mathbb{Z} \xrightarrow{h} H_0(S^n) = \mathbb{Z} \to 0$$

Ainsi : $0 \to H_1(S^n) \xrightarrow{f} H_1(S^n, H^-) \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \to 0$
et H^-, et S^n sont connexes par arcs.
Mais h est un isomorphisme car $\operatorname{Im} h = \mathbb{Z}$, donc g est nulle et f est un isomorphisme, donc :

$$H_1(S^n) \simeq H_1(S^n, H^-) \underset{\text{(excision)}}{\simeq} H_1(H^+, S^{n-1}) \simeq H_1(B_n, S^{n-1}) \qquad (7)$$

puisque (H^+, S^{n-1}) et (B_n, S^{n-1}) sont homéomorphes pour $n \geq 1$.

Cela achève la démonstration des affirmations $(\bar{1})$ et $(\bar{2})$ (voir isomorphismes (4) et (7)).

* <u>Montrons l'affirmation $(\bar{3})$</u> : D'après les 2 propriétés précédentes,

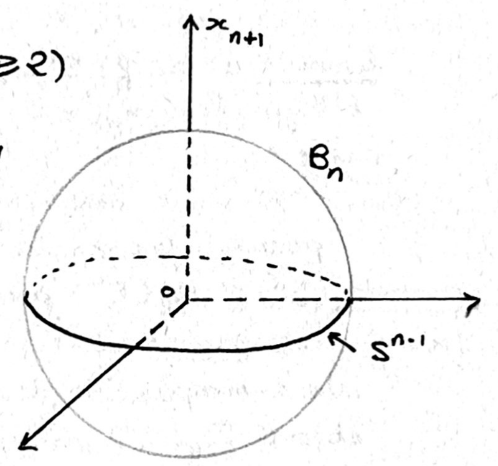
Si $p=n$, $H_n(S^n) \simeq H_1(S^1) \simeq H_1(B_1, S^0) \underset{(6)}{\simeq} \mathbb{Z}$

Si $0<p<n$, $H_p(S^n) \simeq H_1(S^k)$ où $k \geq 2$ et $H_1(S^k) \simeq H_1(B_k, S^{k-1}) \underset{(5)}{=} 0$

Si $p>n$ $H_p(S^n) \simeq H_k(S^0)$ où $k>0$ et $H_k(S^0) = 0$ car S^0 est l'union de 2 points distincts !

CQFD

b) Théorème du point fixe de Brouwer dans B_n.



lemme : S^{n-1} n'est pas une rétraction de B_n $(n \geq 2)$

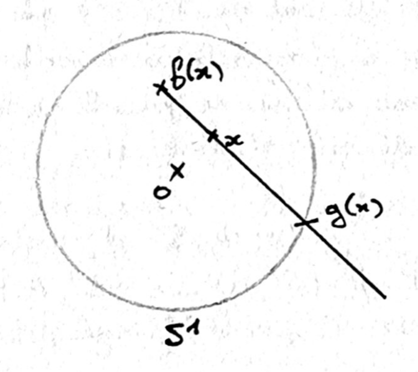
S'il existait une telle rétraction $r : B_n \to S^{n-1}$, et si $i : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$ on aurait la suite d'homomorphismes :

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i} H_{n-1}(B_n) \xrightarrow{r} H_{n-1}(S^{n-1})$$

Mais pour $n \geq 2$, les 3 termes sont $\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}$ ce qui est absurde car $r \circ i = id_{S^{n-1}}$.

Théorème de Brouwer : Toute application continue $B_n \to B_n$ $(n \geq 2)$ admet au moins un point fixe.

preuve : c'est la même que dans le cas $n=2$. Par l'absurde : si $f(x) \neq x$ $\forall x \in B_2$ posons $g(x) = (1-\lambda(x)) f(x) + \lambda(x) x$, où $\lambda(x) \geq 0$, où $\lambda(x)$ est choisi de façon à ce que $\|g(x)\| = 1$. Cela est possible car $\|\lambda(x)(x - f(x)) + f(x)\|^2 - 1 = 0$ revient à déterminer la racine positive ou nulle (unique) d'une équation du second degré. (observer que $\|f(x)\| \leq 1$ et que $\frac{x - f(x)}{g(x) - f(x)} \geq 0$, d'où le dessin)



Si $x \in S^1$, $g(x) = x$ donc g est une rétraction de B_2 dans S^1, ce qui est absurde.

c) Degré d'une application de S^n dans S^n

$H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ possède les 2 générateurs 1 et -1. $H_n(S^n)$ possède donc 2 générateurs e et $-e$.

Si $f : S^n \to S^n$ est continue, $H_n(f) : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ est un homomorphisme. Le degré de f (noté $\deg f$) est l'entier relatif $\deg f$ tel que $H_n(f) e = (\deg f) e$.

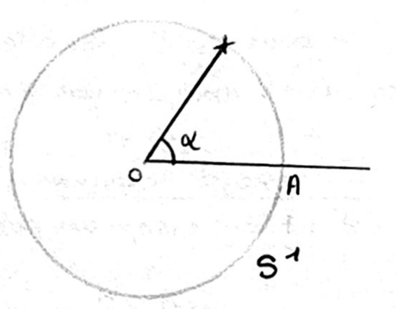
Noter que cet entier est indépendant du choix du générateur de $H_n(S^n)$ car $H_n(f)(-e) = (\deg f)(-e)$.

d) Champ de vecteurs non nuls sur la sphère S^n

<u>lemme 1</u> : Si $\beta : S^n \to S^n$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x_{n+1} = 0$, $H_n(\beta) : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ est le produit par -1.

preuve : On montre le résultat pour $n = 1$, de sorte que l'isomorphisme $H_1(S^1) \simeq H_n(S^n)$ permette de conclure $\forall n \geq 1$.

Un 1-simplexe σ de S^1 est un chemin et $\sigma \in Z_1(S^1)$ ssi ses extrémités sont confondues. Soit α l'angle polaire de l'extrémité de σ et $r_{-\alpha}$ la rotation d'angle $-\alpha$ de S^1 sur S^1. $r_{-\alpha}$ est homotope à l'identité (cf rotations d'angle $-t\alpha$ où $0 \leq t \leq 1$) de sorte que selon



l'invariance de l'homologie par l'homotopie, $r_{-\alpha}(\sigma)$ et σ représentent le m̂ élément de $H_1(S^1)$. (cf : $r_{-\alpha} \simeq id \Rightarrow H_n(r_{-\alpha}) = H_n(id) = id_{H_n(S^1)}$ donc $\forall \dot{\sigma} \in H_n(S^1)$ $H_n(r_{-\alpha})(\dot{\sigma}) = \dot{\sigma} \Leftrightarrow \dot{\overline{r_{-\alpha}\sigma}} = \dot{\sigma}$). On peut donc se borner à des chemins issus du point $A = (1, 0)$.

D'après le lemme de relèvement des chemins*, il existe $\sigma_1 : I \to \mathbb{R}$ tel que $\sigma(\theta) = e^{i2\pi\sigma_1(\theta)}$. $\sigma_1(1) = k$ est l'élément de $\pi_1(S^1)$ que définit σ et si l'on pose $\sigma'(\theta) = e^{i2\pi k\theta}$, on a $\sigma \sim \sigma'$ relativement à $(0,1)$ (considérer $tk\theta + (1-t)\sigma_1(\theta)$). k est au signe près le nbre de tours effectués autour de O par un point décrivant le lacet.

Si s est le lacet $s(\theta) = e^{i2\pi\theta}$, tout lacet σ de S^1 d'origine A se déduit de s par une application Ψ de $(S^1, A) \to (S^1, A)$ qui au point d'angle polaire $2\pi\theta$ associe le point d'angle polaire $2\pi\sigma_1(\theta)$.

Si $\dot{s}$ et $\dot{\sigma}$ sont les éléments de $H_1(S^1)$ que définissent s et σ, $\dot{\sigma} = H_1(\Psi)\dot{s}$ donc $\dot{s} = 0 \Rightarrow H_1(S^1) = 0$, donc $\dot{s} \neq 0$ et $\dot{s}$ engendre $H_1(S^1)$

Appliquant β à s, $2\pi\theta$ étant l'angle polaire du point courant, cela revient à remplacer s par $\varphi(s)$ où φ correspond au chgt de θ en $-\theta$ sur le cercle.

Les appl. s et $\varphi(s)$ se factorisent :

$$s : I \xrightarrow{u} \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \qquad \varphi(s) : I \xrightarrow{-u} \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$\theta \longmapsto \theta \longmapsto e^{i2\pi\theta} \qquad \theta \longmapsto -\theta \longmapsto e^{-i2\pi\theta}$$

* : cf chapitre II Gumeyrolle

$(-u)$ s'identifie à $(-1)u$ de sorte que les propriétés fonctorielles montrent que les applications s et $\varphi(s)$ correspondent à des chaînes opposées.
Donc $\dot{s} = -\overline{\varphi(s)} \Longrightarrow H_1(f) = -id_{H_1(S^1)}$
CQFD

<u>lemme 2</u> : La restriction à S^n de toute rotation dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est homotope à l'identité.

preuve : on se ramène à une matrice constituée des blocs diagonaux $\begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}$ ou 1 et l'homotopie est obtenue en prenant $t\theta_k$ $(0 \leq t \leq 1)$

<u>lemme 3</u> : Toute isométrie $u : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définit par sa restriction à S^n une application de $H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ qui est le produit par le déterminant de u.

preuve : Si $\det u = 1$, cf lemme 2. Si $\det u = -1$, fu et uf sont des rotations et $\begin{cases} H_n(fu) = H_n(f)\,H_n(u) = -H_n(u) \\ H_n(fu) = \text{multiplication par } +1 \end{cases}$
Donc $H_n(u) = $ mult. par -1.
CQFD

<u>NB</u> : En particulier la <u>symétrie s par rapport à l'origine</u> induit dans $H_n(S^n)$ la multiplication par $(-1)^{n+1}$.

<u>Définition</u> : Un champ de vecteurs V sur la sphère S^n est une application continue $V : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\forall x \in S^n$ $x \perp V(x)$.
On dira que V est un champ de vecteurs non nuls si $\forall x \in S^n$ $V(x) \neq 0$.

<u>Théorème</u> : Il existe un champ de vecteurs non nuls sur S^n ssi n est impair.

preuve : Si $n = 2p-1$, $V(x_1, \dots, x_{2p}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2p}, x_{2p-1})$ est un champ de vecteurs non nuls en tout point.
Inversement, si $\forall x \in S^n$ $V(x) \neq 0$, $W(x) = \frac{V(x)}{\|V(x)\|}$ définit une appl. : $W : S^n \longrightarrow S^n$
et $x \perp W(x)$ $\forall x \in S^n$. Posons $F(x,t) = x \cos \pi t + W(x) \sin \pi t$.
$F : S^n \times I \longrightarrow S^n$
F est une homotopie de id_{S^n} à s : $F(x,0) = x$ et $F(x,-1) = -x$.
Ainsi $s \sim Id_{S^n}$ et $H_0(H_n(s)) = Id . F$. Il y a contradiction si n est pair, car alors le lemme 3 donne $H_0(H_n(s)) = -Id . F$ CQFD

dans S^n, évidemment ! <u>Subtil</u>.

tsup →

Attention ! Il s'agit d'un champ de vecteurs réels pour la sphère S^n. Pour un champ de vecteurs complexes sur S^n, le raisonnement précédent n'est pas valable en ce qui concerne la réciproque.

Cohomologie singulière

I Cohomologie

1°/ groupe gradué des cochaînes.

On définie sur tout espace topologique X la notion de cochaîne, duale de la notion de chaîne, et qui sert à construire la cohomologie de l'espace.

$C_p(X)$ = groupe abélien libre des p-chaînes singulières de X

Le groupe des p-cochaînes singulières de X est le dual de $C_p(X)$, ie l'ensemble des applications linéaires de $C_p(X)$ dans $\mathbb{Z}$. On notera $C^p(X)$ le groupe des p-cochaînes de X. Une p-cochaîne $\gamma \in C^p(X)$ est donc une application linéaire

$$\gamma : C_p(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$c \longmapsto \gamma(c) \doteq \langle c, \gamma \rangle$$

L'opérateur cobord δ est défini par dualité :

$$\delta : C^p(X) \longrightarrow C^{p+1}(X)$$
$$\gamma \longmapsto \delta\gamma \quad \text{où} \quad \langle c, \delta\gamma \rangle = \langle \partial c, \gamma \rangle$$

Il vérifie $\delta\delta = 0$, de sorte que l'on dispose du groupe gradué différentiel (un complexe de cochaînes) :

$$C^0(X) \xrightarrow{\delta_0} C^1(X) \longrightarrow \dots \longrightarrow C^p(X) \xrightarrow{\delta_p} C^{p+1} \longrightarrow \dots$$

A toute application continue $f : X \to Y$ on sait faire correspondre un homomorphisme $C_p(f) : C_p(X) \to C_p(Y)$ qui commute avec la différentielle ∂. Définissons $C^p(f) : C^p(Y) \to C^p(X)$ par dualité :

$$\forall c \in C_p(X) \ \forall \gamma \in C^p(Y) \quad \langle c, C^p(f)\gamma \rangle \doteq \langle C_p(f)\, c, \gamma \rangle$$

C^p est un foncteur contravariant de la catégorie des e.t. dans la catégorie des groupes abéliens libres. Comme $C^p(f)$ commute avec δ (ie $\delta \circ C^p(f) = C^{p+1}(f) \circ \delta$), si l'on considère le complexe de cochaînes $C^*(X) \doteq \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} C^p(X)$ et le morphisme de complexes $C^*(f) \doteq \{C^p(f)\}_{p \in \mathbb{N}}$, on obtient un foncteur C^* de la catégorie des e.t. dans la catégorie des complexes de cochaînes.

2°/ Groupes de cohomologie de X

On a :

$\delta_p : C^p(X) \longrightarrow C^{p+1}(X)$. Posons :

$Z^p(X) = \mathrm{Ker}\, \delta_p$ = groupe abélien libre des p-cocycles
$B^p(X) = \mathrm{Im}\, \delta_{p-1}$ = " " des p-cobords $\subset Z^p(X)$

$$H^p(X) = Z^p(X) / B^p(X) = \text{p-groupe de cohomologie de } X$$

Ainsi $\gamma \in Z^p(X) \iff \forall c \in C_{p+1}(X) \quad (\delta\gamma)c = 0$
$\iff \forall \partial c \in B_p(X) \quad \gamma(\partial c) = 0$
de sorte que $Z^p(X)$ soit l'orthogonal de $B_p(X)$ au sens de la dualité $\langle\, , \rangle$.

Toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ définit une morphisme $H^p(f) : H^p(Y) \longrightarrow H^p(X)$ puisque $C^p(f)(Z^p(Y)) \subset Z^p(X)$ et $C^p(f)(B^p(Y)) \subset B^p(X)$, de sorte que H^p définisse un foncteur contravariant. Les groupes de cohomologie sont donc des invariants topologiques.

II Cohomologie relative.

(X, A) = paire d'espaces topologiques (ie $A \subset X$)

$$\partial_{p+1} : C_{p+1}(X) / C_{p+1}(A) \longrightarrow C_p(X) / C_p(A) \quad \text{soit l'opération bord.}$$

$$\delta_p \doteq \text{transposée de } \partial_{p+1} : \left(C_p(X) / C_p(A) \right)^* \longrightarrow \left(C_{p+1}(X) / C_{p+1}(A) \right)^*$$

On définit le p-groupe de cohomologie relative modulo A :

$$H^p(X, A) \doteq \mathrm{Ker}\, \delta_p / \mathrm{Im}\, \delta_{p-1}$$

Introduisons maintenant les cocycles et les cobords relatifs. Notons :

$C_p(A)$ = groupe des p-chaînes de A (qui appliquent le p-simplexe standard dans A) $\subset C_p(X)$

$C_p(X,A) \doteq [C_p(X) \setminus C_p(A)] \cup \{0\}$

$C^p(X,A) \doteq$ dual de $C_p(X,A)$

A

X

2-chaînes dans $X \setminus A$

σ

Il est clair que $C_p(X) = C_p(A) \oplus C_p(X,A)$, et :

<u>lemme</u> : $\left(C_p(X) / C_p(A) \right)^* \simeq C^p(X,A)$

preuve : La suite $0 \to C_p(A) \overset{i}{\hookrightarrow} C_p(X) \xrightarrow{\pi} C_p(X)/C_p(A) \to 0$ est exacte, et par transposition on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \left(C_p(X)/C_p(A) \right)^* \overset{{}^t\pi}{\hookrightarrow} C^p(X) \xrightarrow{{}^t i} C^p(A) \longrightarrow 0$$

de sorte que $\operatorname{Ker} {}^t i \simeq \left(C_p(X)/C_p(A) \right)^*$

Mais $\gamma \in \operatorname{Ker} {}^t i \Leftrightarrow \forall c \in C_p(A) \quad {}^t i(\gamma) c = 0 \quad \Leftrightarrow \gamma \in C^p(X,A)$

ie $\gamma(i(c)) = 0$

ie $\gamma(c) = 0$

CQFD

On identifie $\left(C_p(X)/C_p(A) \right)^*$ et $C^p(X,A)$ de sorte que l'on puisse parler de l'opérateur cobord : $\delta_p : C^p(X,A) \longrightarrow C^{p+1}(X,A)$ (où $\delta_{p+1} \delta_p = 0$ puisque δ est compatible avec l'isomorphisme d'identification)

Posons :

$Z^p(X,A) = \operatorname{Ker} \delta_p$ = ens. des p-cocycles relatifs $\subset C^p(X,A)$

$B^p(X,A) = \operatorname{Im} \delta_{p-1}$ = ens. des p-cobords relatifs $\subset C^p(X,A)$

On aura (cf. lemme) : $\boxed{H^p(X,A) \simeq Z^p(X,A) / B^p(X,A)}$

<u>Remarques</u> :

* $Z^p(X,A) = \{ \gamma \in C^p(X,A) \,/\, \gamma$ s'annule sur $B_p(X,A) \}$ = ensemble des cochaînes de $C^p(X,A)$ qui s'annulent sur $B_p(X,A)$.

En effet, $Z^p(X,A) = \operatorname{Ker} \delta_p = \{ \gamma \in C^p(X,A) \,/\, \delta_p(\gamma) = 0$ dans $C^{p+1}(X,A) \}$

et : $\delta_p(\gamma) = 0$ dans $C^{p+1}(X,A) \Leftrightarrow \forall c \in C_{p+1}(X,A) \quad \delta_p(\gamma) c = 0$

$\Leftrightarrow \forall \partial c \in B_p(X,A) \quad \gamma(\partial c) = 0$

(NB : ∂c décrit $B_p(X,A)$ puisque $\gamma \in C^p(X,A)$ s'annule sur $C_p(A)$ et $B_p(X,A) = \{ c \in C_p(X) \,/\, \exists c' \in C_{p+1}(X) \ \exists w \in C_p(A) \quad c = \partial c' + w \}$)

$* \ B^p(X,A) \subset \{ \gamma \in C^p(X,A) \ / \ \gamma$ s'annule sur $Z_p(X,A) \}$

preuve : si $\gamma \in C^{p-1}(X,A)$ et $c \in Z_p(X,A)$ $\quad (\delta\gamma)c = \gamma(\partial c)$
et $\partial c \in C_{p-1}(A)$ de sorte que $(\delta\gamma)c = 0$ (puisque les éléments de $C^{p-1}(X,A)$ sont nuls sur $C_{p-1}(A)$.)

Produit de Kronecker :

Soient $\dot{c} \in H_p(X,A)$ dont un représentant est le cycle relatif $c \in Z_p(X,A)$ et $\dot{\gamma} \in H^p(X,A)$ représenté par le cocycle relatif $\gamma \in Z^p(X,A)$.

On pose : $$\langle \dot{c}, \dot{\gamma} \rangle = \langle c, \gamma \rangle$$

$\langle \dot{c}, \dot{\gamma} \rangle$ s'appelle le produit de Kronecker, et il ne dépend pas des représentants c et γ puisque si c' et γ' sont d'autres représentants, on a :

$$\begin{cases} c' - c \in B_p(X,A) & \gamma, \gamma' \in Z^p(X,A) \\ \gamma' - \gamma \in B^p(X,A) & c, c' \in Z_p(X,A) \end{cases}$$

de sorte que selon la remarque précédente :

$$\begin{cases} \langle c'-c, \gamma+\gamma' \rangle = 0 \iff \langle c', \gamma \rangle - \langle c, \gamma' \rangle - \langle c, \gamma \rangle + \langle c', \gamma' \rangle = 0 \\ \langle c, \gamma - \gamma' \rangle = 0 \iff \langle c, \gamma \rangle = \langle c, \gamma' \rangle \\ \langle c'-c, \gamma \rangle = 0 \iff \langle c', \gamma \rangle = \langle c, \gamma \rangle \end{cases}$$

d'où $\langle c', \gamma' \rangle = \langle c, \gamma \rangle$.

Conséquence :

L'application $\alpha : H^p(X,A) \longrightarrow H_p^*(X,A)$
$\qquad \dot{\gamma} \longmapsto \alpha(\dot{\gamma})$

définie par :

$$\alpha(\dot{\gamma})\dot{c} = \langle \dot{c}, \dot{\gamma} \rangle$$

est un homomorphisme.

Note : Si l'on utilise des techniques d'algèbre linéaire et si l'on considère la cohomologie singulière à coefficients dans un anneau F au lieu de $\mathbb{Z}$, on obtient :

1) Si F est un anneau principal, α est surjective.
2) Si F est un corps, α est un isomorphisme.

III Suite exacte de cohomologie

Cobord $\delta : H^p(A) \longrightarrow H^{p+1}(X,A)$

Soient $i : A \hookrightarrow X$ et $j : (X,\emptyset) = X \longrightarrow (X,A)$. La suite
$$0 \longrightarrow C_p(A) \xrightarrow[i]{} C_p(X) \xrightarrow[j]{} C_p(X,A) \longrightarrow 0$$ est exacte,
de sorte que par dualité la suite :
$$0 \longrightarrow C^p(X,A) \xrightarrow[{}^t j]{} C^p(X) \xrightarrow[{}^t i]{} C^p(A) \longrightarrow 0$$ soit exacte.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^p(X,A) & \longrightarrow & C^p(X) & \longrightarrow & C^p(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{p+1}(X,A) & \longrightarrow & C^{p+1}(X) & \longrightarrow & C^{p+1}(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si $\gamma \in C^p(X)$ est une cochaine de X telle que ${}^t i(\gamma)$ soit un cocycle de A, on a ${}^t i(\delta\gamma) = \delta({}^t i(\gamma)) = 0$, et $\delta\gamma$ définit un $(p+1)$-cocycle relatif : $\delta\gamma \in \operatorname{Ker} {}^t i = \operatorname{Im} {}^t j$ et ${}^t j$ est injective, donc $\exists ! \gamma_1 \in C^{p+1}(X,A)$ $\delta\gamma = {}^t j(\gamma_1)$ et $\delta\gamma_1 = 0$. On peut <u>identifier</u> γ_1 et $\delta\gamma$.

Notons qu'un cocycle $\gamma \in Z^p(A)$ de A est une cochaîne de X telle que ${}^t i(\gamma)$ soit un cocycle de A, de sorte que la construction ci-dessus soit valable. On pose alors :

$$\begin{array}{rcll} \delta : H^p(A) & \longrightarrow & H^{p+1}(X,A) & \\ \dot\gamma & \longmapsto & \dot{\overline{\delta\gamma}} & (\text{après identification } \delta\gamma = \gamma_1) \end{array}$$

Notons que $\dot{\overline{\delta\gamma}}$ ne dépend pas du représentant $\gamma \in Z^p(A)$ choisi pour $\dot\gamma$ puisque si $\gamma' - \gamma \in B^p(A)$, et en notant $\gamma'_1 \in Z^{p+1}(X,A)$ le cocycle obtenu par l'identification ci-dessus, on a :
$$\delta\gamma' = {}^t j(\gamma'_1) \quad \text{et } \delta\gamma'_1 = 0$$
et $\delta\gamma' - \delta\gamma = \delta(\gamma' - \gamma) = 0$ car $\gamma' - \gamma \in B^p(A)$
d'où ${}^t j(\gamma'_1 - \gamma_1) = 0 \Rightarrow \gamma'_1 = \gamma_1$ car ${}^t j$ est injective.

<u>Théorème</u> : La suite de cohomologie est exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(X,A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^p(X) \longrightarrow H^p(A) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X,A) \longrightarrow \cdots$$

IV Propriétés de la cohomologie

1°/ Propriétés fondamentales

Théorème :

(1) H^p est un foncteur contravariant qui commute avec l'opérateur cobord δ (ie : $H^{p+1}(f) \circ \delta = \delta \circ H^p(f)$)

(2) La suite de cohomologie est exacte

(3) Si f est homotope à g, on a $H^p(f) = H^p(g)$ (invariance par homotopie)

(4) Si $U \subset A \subset X$ et $\bar{U} \subset \mathring{A}$, alors U peut être excisé (c.à.d : $H^p(X, A) \simeq H^p(X \setminus U, A \setminus U)$)

(5) Pour tout point x_0, on a la cohomologie triviale

$$\begin{cases} H^p(x_0) = 0 \text{ si } p > 0 \\ H^0(x_0) \simeq \mathbb{Z} \end{cases}$$

(si $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des coefficients de la cohomologie, F sinon)

(NB : les démonstrations de (3), (4) et (5) sont longues, mais si F est un corps tous ces résultats sont immédiats d'après la note du II.)

2°/ L'algèbre de cohomologie

Produit en coupe $\cup$ ("cup product")

On définit un produit $\cup$ dans $C^*(X) \doteq \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} C^p(X)$ qui est bilinéaire et qui applique $C^p(X) \times C^q(X) \longrightarrow C^{p+q}(X)$ en posant :

$\forall \alpha \in C^p(X)$ $\forall \beta \in C^q(X)$ $\forall \sigma$ $p+q$-simplexe singulier

$$\boxed{\langle \sigma, \alpha \cup \beta \rangle \doteq \langle \sigma \lambda_p, \alpha \rangle . \langle \sigma \rho_q, \beta \rangle}$$

où :

$$\lambda_p : \Delta^p \longrightarrow \Delta^{p+q}$$
$$(a_0, \dots, a_p) \longmapsto (a_0, \dots, a_p)$$

$$\rho_q : \Delta^q \longrightarrow \Delta^{p+q}$$
$$(a_0, \dots, a_q) \longmapsto (a_p, \dots, a_{p+q})$$

(ainsi $\langle \sigma \lambda_p, \alpha \rangle$ indique que la valeur de α est prise sur les $p+1$ premiers sommets de σ, et celle de β sur les $q+1$ derniers)

∪ est associatif et possède un élément neutre (la 0-cochaîne 1 telle que $\langle x, 1\rangle = 1 \quad \forall x \in X$).

<u>$C^*(X)$ est une algèbre graduée unitaire</u>.

<u>Le cobord est une antidérivation de degré 1 de $C^*(X)$</u>, ie :

$\forall \alpha \in C^p(X) \quad \forall \beta \in C^q(X)$

$$\delta(\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^p \alpha \cup (\delta\beta)$$

preuve : p 66 AT

Algèbre de cohomologie :

On pose $Z^*(X) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} Z^p(X)$ et $B^*(X) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} B^p(X)$

$Z^*(X)$ est une sous-algèbre de $C^*(X)$ et $B^*(X)$ un idéal bilatère de $Z^*(X)$, et l'on peut passer au quotient et cela de 2 manières équivalentes :

$$H^*(X) \doteq Z^*(X)/B^*(X) \simeq \bigoplus_{p\geq 0} Z^p(X)/B^p(X)$$

($B^*(X)$ s'appelle un idéal homogène de $Z^*(X)$ car il vérifie $B^*(X) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} (B^*(X) \cap Z^p(X))$)

$H^*(X)$ est une algèbre graduée.

Propriétés fonctorielles :

On pose $C^*(f)\left(\sum_p \gamma_p\right) = \sum_p C^p(f)(\gamma_p)$ où $f : X \to Y$

de sorte que $C^*(f)$ soit un morphisme d'algèbres graduées.
De même, on pose

$$H^*(f)\left(\sum_p \dot{\gamma}_p\right) = \sum_p H^p(f)(\dot{\gamma}_p)$$

qui est un homomorphisme d'algèbres graduées.

C^* et H^* sont des foncteurs contravariants de la catégorie des e.t. dans celle des algèbres graduées différentielles (cf. δ)

3°/ Cohomologie de De Rham

Dans l'étude des variétés différentielles un exemple fondamental de cohomologie est celle des formes différentielles, le cup-product s'obtenant alors par passage au quotient du produit extérieur $\wedge$.
La formule :

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} (\beta \cup \alpha) \qquad \alpha \in H^p(X),\ \beta \in H^q(X)$$

est absolument générale.

4°/ Produit en casquette $\cap$ ("cap-product")

On définit l'application bilinéaire :

$$C_{p+q}(X) \times C^p(X) \longrightarrow C_q(X)$$
$$(c, \alpha) \longmapsto c \cap \alpha$$

par $\forall \beta \in C^q(X) \quad \langle c \cap \alpha, \beta \rangle = \langle c, \alpha \cup \beta \rangle$

(Comparer avec le produit intérieur de l'algèbre extérieure !)

On a l'application $\cap : C_*(X) \times C^*(X) \longrightarrow C_*(X)$ par linéarité, où $C_*(X) \doteq \bigoplus_{p \geq 0} C_p(X)$, et $C_*(X)$ est un module à droite sur $C^*(X)$.

On peut établir que :

$\forall c \in C_p(X) \quad \forall \alpha \in C^p(X) \qquad \partial(c \cap \alpha) = (-1)^p < \partial c \cap \alpha \; , \; c \cap \delta\alpha >$

et que l'on peut passer au quotient :

$$\cap : \; H_{p+q}(X) \times H^p(X) \longrightarrow H_q(X)$$

Enfin, on peut généraliser à la cohomologie relative les produits $\cap$ et $\cup$. $H^*(X, A)$ est une algèbre graduée et $H_*(X, A)$ est un module à droite sur $H^*(X, A)$